

Zestaw 2 - całki potrójne

1. Obliczyć podane całki potrójne po wskazanych prostopadłościanach:

(a) $\iiint_P xz \sin xy dx dy dz$, gdzie $P = [\frac{1}{6}, \frac{1}{2}] \times [0, \pi] \times [0, 1]$,

(b) $\iiint_P \frac{dx dy dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$, gdzie $P = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$,

(c) $\iiint_P \frac{xdx dy dz}{yz}$, gdzie $P = [1, 2] \times [1, e] \times [1, e]$,

(d) $\iiint_P (x + y + z) dx dy dz$, gdzie $P = [1, 2] \times [2, 3] \times [3, 4]$.

2. Podane całki potrójne zamienić na sumy iloczynów całek pojedynczych:

(a) $\iiint_P z 2^{x-y} dx dy dz$, gdzie $P = [0, 1] \times [0, 1] \times [-1, 1]$,

(b) $\iiint_P \frac{x \ln^2 \sqrt[3]{x}}{\cos z} dx dy dz$, gdzie $P = [0, 1] \times [1, 2] \times [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$,

(c) $\iiint_P z \ln(x^y y^x) dx dy dz$, gdzie $P = [1, e] \times [1, e] \times [0, 1]$.

3. Całkę potrójną $\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar U jest ograniczony powierzchniami o podanych równaniach:

(a) $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 3$,

(b) $x^2 + y^2 = 3, z = -1, z = 2$,

(c) $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, z = 6$,

(d) $x^2 + y^2 + z^2 = 25, z = 4, (z \geq 4)$.

4. Obliczyć całki potrójne z danej funkcji po wskazanych obszarach:

(a) $f(x, y, z) = xyz$, gdzie $U : y \geq x^2, x \geq y^2, 0 \leq z \leq xy$,

(b) $f(x, y, z) = \sqrt{x}$, gdzie $U : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq z \leq \sin y$,

(c) $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$, gdzie $U : x \leq 0, -x \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq -x$,

(d) $f(x, y, z) = \frac{1}{(3x+2y+z+1)^4}$, gdzie $U : x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1 - x - y$,

5. Opisz we współrzędnych sferycznych bryłę zadaną nierównościami:

(a) $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{5 - x^2 - y^2}, x \geq 0$,

(b) $x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 4 - x^2 - y^2, x \geq 0$.

6. Opisz we współrzędnych walcowych bryłę zadaną nierównościami:

$$x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 4 - x^2 - y^2, x \geq 0, z \geq 0.$$

7. Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć podane całki po wskazanych obszarach:

- (a) $\iiint_P (x^2 + y^2) dx dy dz$, gdzie $P : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$,
- (b) $\iiint_P x^2 dx dy dz$, gdzie $P : 0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2$,
- (c) $\iiint_P (x^2 + y^2 + z^2)^2 dx dy dz$, gdzie $P : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1$,
- (d) $\iiint_P xyz dx dy dz$, gdzie $P : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

8. Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć podane całki po wskazanych obszarach:

- (a) $\iiint_P (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, gdzie $P : -\sqrt{4 - x^2 - y^2} \leq z \leq 0$,
- (b) $\iiint_P z^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, gdzie $P : 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}$,
 $x \geq 0, y \geq x$,
- (c) $\iiint_P \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, gdzie $P : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$,
- (d) $\iiint_P z^2 dx dy dz$, gdzie $P : x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2 (R > 0)$.

9. Obliczyć objętości obszarów U ograniczonych podanymi powierzchniami:

- (a) $z = 2 - x^2 - y^2, z = 0$,
- (b) $z = \sqrt[4]{x^2 + y^2}, z = 1, z = \sqrt{2}$,
- (c) $x^2 + y^2 = 9, x + y + z = 1, x + y + z = 5$,
- (d) $x = -1, x = 2, z = 4 - y^2, z = 2 + y^2$,
- (e) $x + y + z = 4, x = 3, y = 2, x = 0, y = 0, z = 0$,
- (f) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z, x^2 + y^2 = z^2$,
- (g) $2z = x^2 + y^2, y + z = 4$.

10. Znaleźć masę części kuli o promieniu c znajdującej się w pierwszej ósemce układu współrzędnych i ograniczonej powierzchnią $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, ($a \leq c, b \leq c$), wiedząc, że jej gęstość w punkcie (x, y, z) wynosi $\rho(x, y, z) = z$.

11. Obliczyć masę bryły ograniczonej powierzchniami $z = 2 - x^2 - y^2$ oraz $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ wiedząc, że gęstość w punkcie (x, y, z) jest równa kwadratowi odległości tego punktu od osi z .

12. Dana jest jednorodna bryła V (o gęstości ρ) ograniczona powierzchniami $x^2 + y^2 = -z + 1, z = 0, (x \geq 0, y \geq 0)$. Znaleźć momenty statyczne względem płaszczyzn układu oraz współrzędne środka ciężkości bryły.

13. Znaleźć współrzędne środków ciężkości brył ograniczonych powierzchniami o równaniach:

- (a) $x + y + z = a, x = 0, y = 0, z = 0,$
 - (b) $z = x^2 + y^2, x + y = a, x = 0, y = 0, z = 0,$
 - (c) $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2, (z > 0),$
 - (d) $x^2 + y^2 = z, x + y + z = 0.$
-