

### Zestaw 3 - całki krzywoliniowe nieskierowane

1. Obliczyć całki krzywoliniowe nieskierowane wzdłuż łuku  $L$ :
    - (a)  $\int_L (x + y)dl$ , gdzie  $L$  jest obwodem trójkąta o wierzchołkach  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,
    - (b)  $\int_L (x^2 + y^2)dl$ , gdzie  $L$  to krzywa o równaniu  $x(t) = a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y(t) = a(\sin t - t \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,
    - (c)  $\int_L x^2 y dl$ , gdzie  $L$  jest częścią okręgu leżącą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych,
    - (d)  $\int_L x^2 y dl$ , gdzie  $L$  jest częścią elipsy  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  leżącą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych,
    - (e)  $\int_L x^2 y dl$ , gdzie  $L$  jest częścią elipsy  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  leżącą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych,
    - (f)  $\int_L x^2 dl$ , gdzie  $L$  jest górną częścią okręgu  $x^2 + y^2 = a^2$  zawartą między punktami  $A = (a, 0)$  i  $B = (-a, 0)$ ,
    - (g)  $\int_L xy dl$ , gdzie  $L$  jest obwodem kwadratu  $|x| + |y| = a$ ,  $(a > 0)$ ,
    - (h)  $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$ , gdzie  $L$  jest odcinkiem łączącym punkty  $A(0, 0)$  i  $B(1, 2)$ ,
    - (i)  $\int_L (y - x)dl$ , gdzie  $L$  jest łukiem krzywej  $y = x^3$  zawartym między punktami  $A(1, 1)$  i  $B(2, 8)$ .
  2. Obliczyć całkę krzywoliniową nieskierowaną  $\int_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y})dl$  wziętą od punktu  $E = (-1, 0)$  do punktu  $H = (0, 1)$ :
    - (a) po prostej  $EH$ ,
    - (b) po łuku asteroidy  $x = \cos^3 t$ ,  $y = \sin^3 t$ .
  3. Dane są punkty :  $A = (3, -6, 0)$  i  $B = (-2, 4, 5)$ . Obliczyć całkę krzywoliniową nieskierowaną  $\int_C xy^2 dx + yz^2 dy - zx^2 dz$ , gdy krzywą całkowania  $C$  jest:
    - (a) odcinek  $OB$ , gdzie  $O$  jest początkiem układu współrzędnych,
    - (b) łuk okręgu  $AB$  dany równaniami  $x^2 + y^2 + z^2 = 45$ ,  $2x + y = 0$ .
  4. Wyznaczyć długość oraz masę krzywej  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$  dla  $0 \leq t \leq 2\pi$ , jeżeli gęstość tej krzywej wyraża się funkcją  $\rho(x, y) = |y|$ .
  5. Znaleźć długość oraz masę łuku krzywej:
-

- (a)  $x = e^t \cos t$ ,  $y = e^t \sin t$ ,  $z = e^t$  dla  $0 \leq t \leq 1$ , jeśli gęstość łuku wyraża się funkcją  $\rho(x, y, z) = e^t$ ,
- (b)  $x = at$ ,  $y = \frac{1}{2}at^2$ ,  $z = \frac{1}{3}at^3$  dla  $0 \leq t \leq 1$ , jeśli gęstość łuku wyraża się funkcją  $\rho(x, y, z) = \sqrt{\frac{2y}{a}}$ .

6. Znaleźć momenty statyczne:

- (a) łuku krzywej o równaniu  $y = \sqrt{x}$ , gdzie  $x \in \langle 1, 4 \rangle$ , względem osi  $OX$ ,
- (b) łuku krzywej o równaniu  $y = x^2$ , gdzie  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ , względem osi  $OY$ .

7. Znaleźć współrzędne środka ciężkości łuku krzywej określonej równaniami  $x(t) = a(t - \sin t)$ ,  $y(t) = a(1 - \cos t)$ , gdzie  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .

---