Zestaw 7 - ekstrema funkcji wielu zmiennych

1. Wyznaczyć ekstrema lokalne następujących funkcji:

   (a) $f(x,y) = 3x^2y - x^3 - y^4$,

   (b) $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{1}{x} + y$,

   (c) $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$,

   (d) $f(x,y,z) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$,

   (e) $f(x,y,z) = (x+y+2z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$,

   (f) $f(x,y,z) = 2\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} - 4x + 2z^2$

   (g) $f(x,y,z) = \frac{a^2}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{b^2}$, gdzie $x, y, z, a, b > 0$,

   (h) $f(x,y) = x + y + 4\sin x \sin y$,

   (i) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$,

   (j) $f(x,y,z) = xyz(1-x-y-z)$,

   (k) $f(x,y,z) = 2\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} - 4x + 2z^2$.

   (l) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, gdzie $\mathbb{D}_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$,

   (m) $f(x,y) = xy(3-x-y)$,

   (n) $f(x,y,z) = 2x - y + z + \frac{8}{x} - \frac{4}{y} + \frac{4}{z}$,

   (o) $f(x,y,z) = x^3 + 2y^2 + z^2 - xy + 2yz - x$.

2. Znaleźć odległość punktów $A = (0,1,0)$ oraz $B = (0,0,1)$ od powierzchni o równaniu $z = xy$.

3. Wyznaczyć ekstrema funkcji f przy zadanych warunkach

   (a) $f(x,y) = xy$, przy warunku $x^2 + y^2 = 2$,

   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, przy warunku $x^3 + y^3 - 16 = 0$,

   (c) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, przy warunku $x + y - 1 = 0$,

   (d) $f(x,y) = x^3 + y^3$, przy warunku $x + y - 2 = 0$,

   (e) $f(x,y) = x + y$, przy warunku $e^{x+y} - xy - 1 = 0$,

   (f) $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, przy warunku $x - y + \frac{pi}{4} = 0$,

   (g) $f(x,y) = 5x + 3y$, przy warunku $4\sin x - 3\cos y = 0$,

   (h) $f(x,y,z) = x + y + 2z$, przy warunku $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

   (i) $f(x,y,z) = xy^3z^3$, przy warunku $x + 2y + 3z = 1$, $x, y, z > 0$,

   (j) $f(x,y,z) = xyz$, przy warunku $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x, y, z > 0$,

   (k) $f(x,y,z) = xyz$, przy warunkach $x + y + z = 5$, $xy + xz + yz = 8$,

4. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f w zadanym zbiorze D:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y,$, D - trójkąt ograniczony przez proste o równaniach $x = 0$, $y = 0$, $x + y + 3 = 0$.

(b) $f(x,y) = 2xy$, $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$,

(c) $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$, $D = [0, \frac{pi}{2}] \times [0, \frac{pi}{2}]$,

(d) $f(x,y) = 2x^2 - 2y^2$, $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 4\}$,

(e) $f(x,y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 4\}$,

(f) $f(x,y) = 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2}$, $D = \{(x,y) : \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 \leqslant 4\}$,

(g) $f(x,y,z) = xyz$, $D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4\}$,

(h) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$, D-bryła (domknięta) ograniczona powierzchniami $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$.