

KOŁOKWIUM 2 - ALGEBRA, 26 stycznia 2015

1. (14 pkt.) Dane są punkty $A = (4, 1, -1)$, $B = (0, 2, 0)$, $C = (-2, 1, 1)$, oraz płaszczyzna $\pi : -x - y - 3z + 5 = 0$.

(a) (6 pkt.) Wykazać, że trójkąt ABC jest równoległy do płaszczyzny π .

(b) (8 pkt.) Obliczyć objętość ostrosłupa $ABCD$ gdzie punkt D jest rzutem prostokątnym punktu przecięcia się wysokości trójkąta ABC na płaszczyznę π .

2. (15 pkt.) W zależności od parametrów a i p rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 2x & +y & +pz & = 1 \\ (2-p)x & +y & & = a \\ 2x & +(1-p)y & +pz & = -ap \end{cases}$$

3. (20 pkt.) Dana jest macierz odwzorowania liniowego $L : \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_1$ w bazach $B_1 = (x^2 + 1, x^2 - x, x)$ i $B_2 = (x + 1, x - 1)$

$$M_L(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) (8 pkt.) Znaleźć macierz odwzorowania L w bazach standardowych.

(b) (9 pkt.) Znaleźć ImL , $KerL$ oraz podać ich bazy i wymiary.

(c) (3 pkt.) Wyznaczyć $(Lp)(x)$, dla $p(x) = x^2 - x$.

IMIE i NAZWISKO: NR GRUPY:

4. (11 pkt.) Uzupełnić wykropkowane pola:

(a) (1 pkt.) Zbiór $U = \{(x, x + y, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ nie jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni \mathbb{R}^2 , ponieważ

.....

(b) (2 pkt.) Odwzorowanie $L : \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_3$ dane wzorem

$$(Lp)(x) = xp(2) + p(2x) + x + 1,$$

nie jest odwzorowaniem liniowym, ponieważ

.....

(c) (1 pkt.) Nie istnieje odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, takie, że

$$M_L(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

jest macierzą tego odwzorowania, ponieważ

.....

(d) (4 pkt.) Trójkąt ABC , gdzie $A = (3, 2, -1)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (-2, 0, 1)$ jest rozwartokątny, ponieważ

.....

(e) (3 pkt.) Układ równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 2015x_{2015} = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + \dots + 2015^2x_{2015} = 1 \\ \dots \\ x_1 + 2^{2014}x_2 + 3^{2014}x_3 + \dots + 2015^{2014}x_{2015} = 1 \end{cases}$$

nie posiada dokładnie jednego rozwiązania, ponieważ

.....
