

ALGEBRA - Zestaw 1: Liczby zespolone

Zad 1) Wykaż równości dla liczb zespolonych:

a) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ b) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ c) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ d) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Zad 2) Oblicz:

a) $\frac{2+3i}{1+i}$ b) $\frac{(i+\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{1+2i}$ c) $|3-4i|$ d) $\arg(-2+2i)$

Zad 3) Przedstaw podane liczby zespolone w postaci trygonometrycznej:

a) $7+7i$ b) $\sqrt{3}-i$

Zad 4) Zilustruj na płaszczyźnie zespolonej następujące zbiory:

a) $\{z \in \mathbb{C} : |z-i+3| > 3\}$ b) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z+1|\}$
c) $\{z \in \mathbb{C} : \frac{|z-2i|}{|z+3|} < 1\}$ d) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z-i)^2 \leq 0\}$
e) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z-3+i) = \frac{2\pi}{3}\}$ f) $\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} \leq \arg(\overline{z}+i) \leq \pi\}$
g) $\{z \in \mathbb{C} : \arg\frac{i}{i-z} = \frac{4}{3}\pi\}$ h*) $\{z \in \mathbb{C} : \arg\left(\frac{i}{z}\right) \leq \frac{3\pi}{4}\}$

Zad 5) Oblicz wartości podanych wyrażeń (wyniki podaj w postaci algebraicznej):

a) $(1-i)^6$ b) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ c) $\frac{(1+i)^{22}}{(1-i\sqrt{3})^6}$

Zad 6) Oblicz pierwiastki z liczb zespolonych:

a) $\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$ b) $\sqrt[4]{-4}$ c) $\sqrt[6]{-64}$ d) $\sqrt[4]{(-2+3i)^4}$ e) $\sqrt[3]{(2-2i)^9}$

Zad 7) Rozwiąż równania:

a) $z^2 + 2iz + 3 = 0$ b) $z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0$ c) $z^4 - 3iz^2 + 4 = 0$
d) $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \frac{z-i}{z+i} + 1 = 0$ e) $(iz)^6 - 7(iz)^3 - 8 = 0$
f) $z^7 - iz^6 + 2z^4 - 2iz^3 + 2z - 2i = 0$ (wiedząc, że $z=i$ jest pierwiastkiem)
g) $z^4 = (3-i)^8$ h) $z^3 - iz^2 + (1+\sqrt{3}i)z + \sqrt{3}-i = 0$
i) $z^4 + 2z^3 + 9z^2 + 8z + 20 = 0$ (wiedząc, że $z=2i$ jest jego pierwiastkiem)

Zad 8) Punkty $z_1 = 1-3i$, $z_3 = -1+5i$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu. Wyznacz położenia pozostałych wierzchołków tego kwadratu.