

### ALGEBRA - Zestaw 3: Struktury algebraiczne

**Zad 1)** Sprawdź jakie własności posiadają w  $\mathbb{Z}$  następujące działania:  
 $a \circ b = a - b$ ,  $a \circ b = a^2 + b^2$ ,  $a \circ b = 2(a + b)$ ,  $a \circ b = -a - b$ .

**Zad 2)** W zbiorze liczb rzeczywistych określamy działanie:  $x \circ y := x + y + xy$ .  
Czy  $(\mathbb{R}, \circ)$  jest grupą?

**Zad 3)** Które z następujących zbiorów liczb są grupami:

- liczby wymierne ze względu na dodawanie; ze względu na mnożenie,
- liczby niewymierne ze względu na dodawanie; ze względu na mnożenie,
- liczby zespolone o module równym 1 ze względu na mnożenie,
- liczby zespolone o module równym 1 ze względu na następujące działanie:  
 $z_1 \circ z_2 = |z_1|z_2$ ,
- liczby całkowite ze względu na odejmowanie.

**Zad 4)** Niech  $E_n$  będzie zbiorem wszystkich pierwiastków  $n$ -tego stopnia (w  $\mathbb{C}$ ) z jedności. Udowodnij, że  $(E_n, \cdot)$  jest grupą.

**Zad 5)** Czy następujące zbiory są ciałami ze względu na dodawanie i mnożenie:

- $\{a + b\sqrt[3]{5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ ;
- liczby wymierne, które nie są całkowite;
- zbiór liczb zespolonych postaci  $a + ib\sqrt{2}$ ,  $a, b \in \mathbb{Q}$ .

**Zad 6)** W zbiorze  $\mathbb{Z}/k$  określamy działania  $+$ ,  $\cdot$  następująco:

$$[a] + [b] = [a + b], \quad [a] \cdot [b] = [a \cdot b].$$

- Sprawdź, czy  $(\mathbb{Z}/12, +, \cdot)$  jest pierścieniem przemiennym z jedynką ale z dzielnikami zera;
- Wykaż, że  $(\mathbb{Z}/7, +, \cdot)$  jest pierścieniem całkowitym.

**Zad 7)** a) Wykaż, że zbiór  $A = \{x = a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$  z działaniami dodawania i mnożenia jest pierścieniem;

b) Wykaż, że zbiór  $B = \{x = a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$  z działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem;

**Zad 8)** W zbiorze  $\mathbb{R}^2$  wprowadzamy działania:  $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ ,  $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 + py_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ . Dla jakich  $p \in \mathbb{R}$  struktura  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  jest ciałem?

**Zad 9)** a) Wykaż, że zbiór  $A = \{x = m + ni : m, n \in \mathbb{Z}\}$  jest grupą ze względu na dodawanie;

b) Wykaż, że zbiór  $B = \{x = 2^n 3^m : m, n \in \mathbb{Z}\}$  jest grupą ze względu na mnożenie;