ALGEBRA - Zestaw 4: Przestrzenie wektorowe

Zad 1) Niech $A = \{0, 1\}$. W zbiorze A określamy działanie $\oplus$ przyjmując: $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$, $1 \oplus 1 = 0$, oraz działanie $\odot$ przyjmując: $0 \odot 0 = 0 \odot 1 = 1 \odot 0 = 0$, $1 \odot 1 = 1$.
a) Sprawdź, że $(A, \oplus, \odot)$ jest ciałem.
W zbiorze A^2 określamy działanie dodawania jako: $(a, b) + (c, d) = (a \oplus c, b \oplus d)$, oraz mnożenie przez elementy z ciała A następująco: $\alpha \cdot (a, b) = (\alpha \odot a, \alpha \odot b)$.
b) Sprawdź, czy $(A^2, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem A.
c) Wykaż, że przestrzeń A^2 posiada dokładnie pięć podprzestrzeni.

Zad 2) Sprawdź, które z następujących zbiorów są podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^3$:
a) $A = \{(x, y, z) : x + y + z = a, a \in \mathbb{R}\}$ b) $B = \{(x, y, z) : x \geqslant 0\}$
c) $C = \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$ d) $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$
e) $E = \{(x, y, z) : x = 2y \wedge z = 0\}$ f) $F = \{(x, y, z) : 3x + 2y - 8z = 0\}$

Zad 3) Które z następujących podzbiorów przestrzeni wektorowej $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ są jej podprzestrzeniami:
a) $A = \{f : f(2) = f(7)\}$ b) $B = \{f : f(7) = 2 + f(1)\}$
c) $C = \{f : f(x_0) = 3\}$

Zad 4) Które z następujących podzbiorów przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}[x]$ (przestrzeń wielomianów nad ciałem $\mathbb{R}$) są jej podprzestrzeniami:
a) $A = \{w : w(0)w(1) = 0\}$ b) $B = \{w : \text{ stopień } w \leqslant 6\}$
c) $C = \{w : \text{ stopień } w = 6\}$ d) $D = \{w : w(x) \text{ jest podzielne przez } x^2 + 1\}$

Zad 5) Zbadaj, które z układów wektorów należących do $\mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne:
a) $B_1 : (1, 4, 3), (-1, 2, 1), (0, 6, 4)$,
b) $B_2 : (2, 3, -1), (2, 0, 0), (0, 3, 1)$,
c) $B_3 : (2, -7, 2), (0, 2, 4), (2, -1, 5)$.
Znajdź współrzędne wektora $(1, 1, 1)$ względem tych B_i, które stanowią bazę w $\mathbb{R}^3$.

Zad 6 Dla jakiej wartości parametru k wektor $v = (1, -2, k) \in \mathbb{R}^3$ jest kombinacją liniową wektorów $u_1 = (1, 1, 1)$ i $u_2 = (1, 2, 3)$?

Zad 7 Sprawdź, czy następujące funkcje są liniowo niezależne w przestrzeni $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: $f = Id$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = \cos x$.

Zad 8 W $\mathbb{R}^3$ dane są trzy wektory: $u = (0, 1, -1)$, $v = (-1, 0, 1)$, $w = (1, -1, 0)$.

a) Wykaż, że wektory te są parami niezależne.
b) Czy układ wektorów u, v, w jest liniowo niezależny?
c) Podaj wymiar oraz bazę podprzestrzeni generowanej przez te wektory.

Zad 9 Udowodnij, że zbiór: $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0, x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Wyznacz bazę tej podprzestrzeni oraz bazy podprzestrzeni z zadania 2.

Zad 10 Dane są dwa układy wektorów: $B_1 : (1, i, 1+i), (i, -1, 2-i), (0, 0, 3)$ i $B_2 : (2i, 1, 0), (2, -i, 1), (0, 1+i, 1-i)$.
a) Sprawdź, czy któryś z tych układów stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{C}^3(\mathbb{C})$ lub $\mathbb{C}^3(\mathbb{R})$.
b) Jaki wymiar mają przestrzenie $\mathbb{C}^n(\mathbb{C})$ i $\mathbb{C}^n(\mathbb{R})$?
c) Znajdź współrzędne wektora $(1, 0, 1)$ w bazie z podpunktu a).

Zad 11 W przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[x]_2$ dana jest baza $B_1 = (1, x, x^2)$. Wykaż, że układ $B_2 = (1, x-2, (x-2)^2)$ stanowi bazę $\mathbb{R}[x]_2$. Podaj współrzędne wielomianu $P(x) = 2x^2 + 3$ względem obu baz. Czy zbiór $A = \{p \in \mathbb{R}[x]_2 : p(1) = p'(0)\}$ stanowi podprzestrzeń tej przestrzeni? Jeżeli tak, wyznacz jej bazę i wymiar.

Zad 12 Wykaż, że zbiór liczb postaci $\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} + e\sqrt{12} : a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}\}$ tworzy przestrzeń wektorową nad ciałem liczb wymiernych. Znajdź bazę tej przestrzeni.

Zad 13 Wiedząc, że wektory u, v, w stanowią bazę przestrzeni liniowej V (nad ciałem $\mathbb{R}$), zbadaj, który z poniższych układów także stanowi jej bazę:
a) $B_1 = (u - 2v + w, 3u + w, u + 4v - w)$, b) $B_2 = (u, 2u + v, 3u - v + 4w)$.
Wyznacz współrzędne wektora $a = 2u - 3v + 8w$ względem tej bazy.

Zad 14) Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K oraz U i V jej podprzestrzeniami. Wykaż, że $U \cup V$ jest podprzestrzenią X wtedy i tylko wtedy, gdy $U \subset V$ lub $V \subset U$.