ALGEBRA - Zestaw 6a: Geometria analityczna

Zad 1) Sprawdź, czy:
a) wektory $u = [-1, 3, -5]$, $v = [1, -1, 1]$, $w = [4, -2, 0]$ są współpłaszczyznowe;
b) punkty $P = (0, 0, 0)$, $Q = (-1, 2, 3)$, $R = (2, 3, -4)$, $S = (2, -1, 5)$ są współpłaszczyznowe.

Zad 2) Trójkąt ABC rozpięty jest na wektorach $\overrightarrow{AB} = [1, 5, -3]$, $\overrightarrow{AC} = [-1, 0, 4]$. Oblicz wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka C.

Zad 3) Proste l_1 i l_2 dane są równaniami parametrycznymi:

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 - 4t, \\ y = -2t, \\ z = 2 + 4t, \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}); \qquad l_2 : \begin{cases} x = 6 + 6t, \\ y = 4 + 3t, \\ z = -6t. \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Wykaż, że l_1 i l_2 są równoległe. Oblicz odległość miedzy nimi. Znajdź równanie ogólne ich wspólnej płaszczyzny.

Zad 4) Zbadaj wzajemne położenie prostych

$$l_1 : \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = -3t, \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}); \qquad l_2 : \begin{cases} x = -3 + 2t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = -3. \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Znajdź równanie normalne ich wspólnej płaszczyzny (jezeli istnieje).

Zad 5) Zbadaj wzajemne położenie prostych

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = t, \\ z = 2, \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}); \qquad l_2 : \begin{cases} x = 3, \\ y = t, \\ z = -t. \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Jeżeli leżą one na jednej płaszczyźnie, to napisz jej równanie ogólne. Jeżeli nie, to oblicz odległość między tymi prostymi.

Zad 6) Napisz równanie ogólne płaszczyny π przechodzącej przez punkty $A = (-1, 2, 4)$, $B = (2, 1, 3)$ i $C = (3, -1, 5)$. Wyznacz odległość punktu $Q = (5, 0, 8)$ od płaszczyzny π oraz znajdź punkt symetryczny do punktu Q względem tej płaszczyzny.

Zad 7) Znajdź rzut prostokątny punktu $P = (6, 4, 0)$ na prostą

$$l : \begin{cases} x = 6 + 6t, \\ y = 4 + 3t, \\ z = -6t. \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

oraz punkt symetryczny do P względem tej prostej.

Zad 8) Znajdź rzut prostokątny prostej $k : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{2}$ na płaszczyznę $\pi : x + y - 2z + 4 = 0$.

Zad 9) Znajdź odległość prostej $l : \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-1}$ od płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - s + 3t \\ y = 2 - 2s - 2t \\ z = -1 + s - t \end{cases} \qquad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Zad 10) Dana jest prosta $l : \begin{cases} 3x & -2y & +z & = & 3 \\ x & & -2z & = & 0 \end{cases}$

oraz płaszczyzna $\pi_1 : x + y + z + 8 = 0$.

Znajdź równanie ogólne płaszczyzny π zawierającej prostą l i prostopadłej do płaszczyzny π_1.

Zbadaj wzajemne położenie prostej l i krawędzi k przecięcia się płaszczyzn π i π_1.

Zad 11) Znajdź punkt symetryczny do punktu $P = (2, 3, -1)$ względem prostej

$$l : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

oraz płaszczyznę π zawierającą prostą l i punkt P.

Zad 12) Zbadaj wzajemne położenie prostej l prostopadłej do płaszczyzny $\pi : y = 2 + z$ i przechodzącej przez punkt $A = (1, 2, 0)$ oraz prostej k przechodzącej przez punkt $B = (0, 3, -1)$ i równoległej do prostej

$$k' : \begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases} .$$

Wyznacz odległość prostych l i k. Wyznacz objętość równoległościanu rozpinanego przez wersory prostych l i k oraz wektor $\overrightarrow{AB}$.

Zad 13) Dana jest płaszczyzna $\pi : x+2y+3z-6 = 0$ oraz prosta $l : x = y = z$. Wyznacz punkt A przecięcia się prostej l i płaszczyzny π oraz rzut prostokątny k prostej l na płaszczynę π. Wyznacz pole trójkąta ABB', gdzie $B = (0, 0, 0)$ jest punktem należącym do prostej l, a B' jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą k.

Zad 14) Napisz równanie parametryczne i kierunkowe prostej l będącej dwusieczną kąta ostrego utworzonego przez proste:

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}, \quad l_2 : \frac{x+6}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+29}{-12}.$$

Zad 15) Oblicz miarę kąta między:
a) prostą $l : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{-3}$ i płaszczyzną $\pi : x - z = 0$;
b) płaszczyznami $\pi_1 : x - 2y + 3z - 5 = 0$, $\pi_2 : 2x + y - z + 3 = 0$;
c) prostymi $l_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 3t \end{cases}$, gdzie $t \in \mathbb{R}$, $l_2 : \begin{cases} x = 3 - 2s \\ y = 4 - s \\ z = 1 + 3s \end{cases}$, gdzie $s \in \mathbb{R}$.