ALGEBRA - Zestaw 7: Odwzorowanie liniowe

Zad 1) Sprawdź, które z podanych odwzorowań są liniowe:
a) $L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $(Lp)(x) = xp'(x) + p(1)$;
b) $L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $(Lp)(x) = p(x)p'(x)$;
c) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x, y) = (3x + 2y - 1, 2x - 3y)$;
d) $L : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$, $(Lf)(x) = \sin f(x)$;
e) $L : C([0, 1]) \to C([0, 1])$, $(Lf)(x) = 2f(\frac{x}{2})$.

Zad 2) Dane są następujące odwzorowania $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$:
$$f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z), \qquad g(x, y) = (y, x, x + y).$$
a) Sprawdź, że są to odwzorowania liniowe i podaj $f(1, 2, -1)$, $g(-1, 3)$;
b) Znajdź Ker$f$, Imf, Ker$g$, Img i podaj ich wymiary;
c) Sprecyzuj $g \circ f$ i $f \circ g$.

Zad 3) Podaj wymiary jąder i obrazów następujących przekształceń liniowych:
a) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(x, y, z) = (x + y, y + z)$;
b) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $L(x, y, z) = (2x - y + z, x + 2y - z, -x + 3y - 2z, 8x + y + z)$;
c) $L : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$, $(Lp)(x) = (x^2 + x)p(2) + (3x^2 - x)p(1)$.

Zad 4) Odwzorowanie liniowe $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ przeprowadza wektor $x = (2, 1, 1)$ na wektor $u = (4, 5)$ oraz wektor $y = (1, -3, 2)$ na wektor $v = (-6, 1)$. Znajdź obraz wektora $z = (5, 6, 1)$ względem tego odwzorowania. Czy przy tych danych można jednoznacznie określić $L(4, 1, 5)$?

Zad 5) Wyznacz odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ takie, że $f(1, 1, 0) = (1, 1)$, $f(0, 2, -1) = (-1, 0)$, $f(1, 2, -1) = (0, 2)$.

Zad 6) Skonstruuj następujące endomorfizmy:
a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ taki, że Ker$f$ = Lin$\{u_1, u_2\}$ i Imf = Lin$\{v_1, v_2\}$, gdzie $u_1 = (1, 1, -1, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0, 1)$, $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$;
b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ taki, że Imf = Lin$\{v_1, v_2\}$, gdzie $v_1 = (1, 3, 2)$, $v_2 = (3, -1, 1)$;
c) $L : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ taki, że Ker$L$ = Lin$\{1 - x\}$ i ImL = Lin$\{1 + x, 1 + x^2\}$.

Zad 7) Niech $f : U \to V$ będzie odwzorowaniem liniowym, a (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2) będą bazami przestrzeni wektorowych, odpowiednio, U, V (nad ciałem $\mathbb{R}$). Wiedząc, że $f(u_1) = 2v_1$, $f(u_2) = -v_2$, $f(u_1 + u_3) = v_1 + v_2$ i $f(u_1 - u_3) = 3v_1 - v_2$, wyznacz Ker$f$.

Zad 8) Niech $f : U \to V$ będzie odwzorowaniem liniowym, a B bazą w U. Udowodnij, że: f jest injekcją $\Leftrightarrow$ $f(B)$ jest układem liniowo niezależnym.

Zad 9) (1) Niech $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ będzie odwzorowaniem takim, że $(f(P))(x) = -\frac{(x+1)^2}{2}P''(x) + (x+1)P'(x)$, gdzie $P \in \mathbb{R}[x]_2$.
a) Sprawdź, że f jest endomorfizmem w $\mathbb{R}[x]_2$ i że $f \circ f = f$;
b) Znajdź Ker$f$, Imf oraz ich bazy;
c) Wykaż, że $\mathbb{R}[x]_2 = \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}f$;
(2) Niech $g : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem takim, że $g(P) = (P(1), P'(1), P''(1))$. Wykaż, że g jest izomorfizmem i znajdź g^{-1}.

Zad 10) Niech V, W, U będą przestrzeniami wektorowymi nad ciaem K, niech $f : V \to W$, $g : V \to W$, $h : W \to U$ będą odwzorowaniami liniowymi, i niech $\alpha \in K$. Udowodnij, że αf, $f + g$ oraz $h \circ f$ też są odwzorowaniami liniowymi.