ALGEBRA - Zestaw 9: Wartości własne i diagonalizacja

Zad 1) Dany jest endomorfizm $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ taki, że
$f(x, y, z) = (-x + y - z, -x + y + z, -2x + 2y)$.
a) Znajdź wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ endomorfizmu f i opowiadające im podprzestrzenie własne;
b) Ustal dowolne wektory własne u_1, u_2, u_3 odpowiadające wartościom $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ i uzasadnij, że (u_1, u_2, u_3) jest bazą w $\mathbb{R}^3$. Napisz macierz A odwzorowania f względem tej bazy;
c) Wyznacz macierz A z definicji.

Zad 2) W przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$ dany jest endomorfizm f taki, że

$$\forall w \in \mathbb{R}[x]_3 : \quad (f(w))(x) = \frac{d}{dx}((x + 1)w(x)).$$

a) Znajdź macierz endomorfizmu f w bazie $(1, x, x^2, x^3)$;
b) Znajdź podprzestrzenie własne oraz ich bazy.

Zad 3) Niech

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

będzie macierzą endomorfizmu f względem bazy kanonicznej w $\mathbb{R}^3$.
a) Znajdź wartości własne i podprzestrzenie własne endomorfizmu f;
b) Ustal bazę w $\mathbb{R}^3$ złożoną z wektorów własnych i podaj macierz C odwzorowania f względem tej bazy.

Zad 4) Sprawdź, czy następujące macierze są diagonalizowalne:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zad 5) Niech $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ będzie bazą kanoniczną w $\mathbb{R}^4$ i f endomorfizmem takim, że $f(e_i) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ dla $i = 1, 2, 3, 4$.
a) Podaj macierz endomorfizmu f względem bazy B;
b) Znajdź $\mathrm{Im}f$, $\dim\mathrm{Im}f$, $\mathrm{Ker}f$ i jego bazę;
c) Znajdź wartości własne i podprzestrzenie własne. Czy f jest endomorfizmem diagonalizowalnym?

Zad 6) Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Wykaż, że $A^2 = A + 2I$, a nstępnie na tej podstawie wywnioskuj, że A jest odwracalna i wyraź A^{-1} przy pomocy A.
2. Niech $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wykaż, że $A^n = a_n A + b_n I$ $(A^0 := I)$, gdzie a_n i b_n są liczbami naturalnymi spełniającymi związki:

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & a_n + b_n, \\ b_{n+1} & = & 2a_n. \end{array} \qquad (1)$$

3. Dana jest macierz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Znajdź macierz nieosobliwą P taką, aby $D = P^{-1}MP$ była macierzą diagonalną;
b) Wyznacz D^n, a następnie M^n dla $n \in \mathbb{N}$;
c) Zapisz związki (1) w postaci macierzowej i korzystając z punktu b), wyraź a_n i b_n przy pomocy n.

Zad 7) Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ a & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. Dla jakich wartości parametru a macierz A jest diagonalizowalna? W tym przypadku znajdź macierz nieosobliwą P tak, aby $D = P^{-1}AP$ była diagonalna.
2. Przyjmijmy $a = 0$.
a) Wyznacz A^n;
b) Dane są rekurencyjnie trzy ciągi:

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & 3u_{n-1}, \\ v_n & = & 4u_{n-1} + v_{n-1} + 2w_n, \\ w_n & = & 3w_{n-1}, \end{array}$$

gdzie u_0, v_0, w_0 są pewnymi ustalonymi liczbami.
Wyraź u_n, v_n, w_n przy pomocy n, u_0, v_0, w_0.

Zad 8) Wyznacz wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie własne odwzorowania:
$f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$: $f(ax^2 + bx + c) = (-a - 2b - 2c)x^2 + 2bx + (c + 2b)$
Jeżeli f jest endomorfizmem diagonalizowalnym, podaj bazę B', w której macierz D endomorfizmu ($D = M_f(B')$) ma postać diagonalną, podaj macierz D oraz macierz przejścia od bazy kanonicznej B do bazy B'. Wyznacz $f^{10}(2-x^2)$.