KOLOKWIUM 1 - Matematyka I, 24 listopada 2014

1. (8 pkt.) Oblicz

   (a)
   $$\arctan\left(\tan\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right),$$

   (b)
   $$\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}\right),$$

   (c)
   $$\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right),$$

   (d)
   $$\arccos\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\right).$$

2. (8 pkt.) Korzystając z definicji sprawdź czy funkcja $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}$ dana wzorem
   $$f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$$
   jest injekcją oraz suriekcją. Czy funkcja f jest bijekcją? Jeżeli tak, to znajdź jej funkcję odwrotną.

3. (13 pkt.) Znajdź granice

   (a)
   $$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n n!}{n^n},$$

   (b)
   $$\lim_{n\to+\infty}\arctan\left(\frac{n^3}{n^2+1}\right),$$

   (c)
   $$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}\sin(n^2+\pi^n),$$

   (d)
   $$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n}.$$

4. (10 pkt.) Zbadaj parzystość i okresowość funkcji
   $$f(x)=2\tan\left(\frac{x}{4}\right).$$
   (Uwaga! $\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$).

5. (11 pkt.) Znajdź granicę lewostronną i prawostronną w punkcie $x_0=0$ funkcji f zdefiniowanej wzorem
   $$f(x)=\frac{\tan 2x}{|x|}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2},\ \text{dla } x\neq 0$$
   Jaka powinna być wartość funkcji f w punkcie 0 aby tak zdefiniowana funkcja była ciągła?