Zestaw 3 - granica i ciągłość funkcji, porównywanie nieskończenie małych i nieskończenie dużych.

1. Oblicz (jeżeli istnieją) granice funkcji:
   (a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4}{x+2}$,
   (b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x-2}$,
   (c) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x+1}$,
   (d) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$,
   (e) $\lim_{x\to 3} \frac{27-x^3}{x-3}$,
   (f) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{2x-6}$,
   (g) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$,
   (h) $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^5+32}$,
   (i) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20}$,
   (j) $\lim_{x\to -5} \frac{x^3+125}{2x^2-50}$,
   (k) $\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2}$,
   (l) $\lim_{x\to 1} \frac{x^5-1}{x-1}$.
2. Oblicz (jeżeli istnieją) granice funkcji:
   (a) $\lim_{x\to 25} \frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$,
   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$,
   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$.
3. Oblicz (jeżeli istnieją) granice funkcji:
   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{4x}$,
   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{4x}{3\sin 2x}$,
   (c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x}$,
   (d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}$,
   (e) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$,
   (f) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{4x}$,
   (g) $\lim_{x\to 8} \frac{8-x}{\sin \frac{1}{8}\pi x}$,
   (h) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$,
   (i) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\tan x}$,
   (j) $\lim_{x\to \pi} \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$.
4. Oblicz (jeżeli istnieją) granice funkcji:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-4}{3x^3+x^2-x-1}$,

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$,

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$,

(d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$,

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{2x}}{\mathrm{tg} x}$,

(f) $\lim_{x\to 5} \frac{x^3-125}{x^2-25}$,

(g) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4}$,

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg} x}{4x}$,

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$,

(j) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5(5x)\cos^{17}(17x)}{\cos^9(9x)\cos^{13}(13x)}$,

(k) $\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1-3x}$,

(l) $\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1+\sin x}$,

(m) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$,

(n) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^x}{x}$,

(o) $\lim_{x\to -1} e^{\frac{1}{x+1}}$,

(p) $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$,

(q) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}$.

5. Znaleźć granicę lewostronną i prawostroną funkcji f w punkcie x_0, gdzie:

(a) $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$, $x_0 = 0$,

(b) $f(x) = e^{\frac{1}{1-x^3}}$, $x_0 = 1$,

(c) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, $x_0 = 0$,

(d) $f(x) = \frac{x}{2x+e^{\frac{1}{x-1}}}$, $x_0 = 1$,

(e) $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $x_0 = 0$,

(f) $f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}}+3}{3^{\frac{1}{x}}+2}$, $x_0 = 0$,

(g) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{|\sin x|}}$, $x_0 = 0$,

6. Zbadać ciągłość następujących funkcji:

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x+5}, & x \neq -5 \\ -10, & x = -5 \end{cases},$$

(b)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},$$

(c)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},$$

(d)
$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

7. Jaka powinna być wartość funkcji f w punkcie $x = 0$, aby tak zdefiniowana funkcja była ciągła, jeżeli dla $x \neq 0$ funkcja f dana jest wzorem:

   (a) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$,
   (b) $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$,
   (c) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

8. Znaleźć asymptoty (o ile istnieją) następujących funkcji:

   (a) $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$,
   (b) $f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{3x^2-10x+3}$,
   (c) $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$,
   (d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$,
   (e) $f(x) = x + 2\sqrt{-x}$,
   (f) $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{2-x}}$,
   (g) $f(x) = x - 2 \arctan x$.

9. Obliczyć granice jenostronne funkcji f w punkcie x_0, a następnie rozstrzygnąć, czy funkcja ma w tym punkcie granice:

   (a) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, $x_0 = 0$,
   (b) $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} + x$, $x_0 = 1$,
   (c) $f(x) = \frac{x}{x-2}$, $x_0 = 2$,
   (d) $f(x) = \arctan \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 1$,
   (e) $f(x) = x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$,
   (f) $f(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{|x - \frac{\pi}{2}|}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

10. Zbadać ciągłość następujących funkcji:

   (a)
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x^2, & 1 < x \leqslant 2, \end{cases},$$

(b)
$$f(x) = \begin{cases} cos\frac{\pi x}{2}, & |x| \leqslant 1 \\ |x-1|, & |x| > 1 \end{cases},$$

(c)
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\arctan\frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

11. Dobrać $a \in \mathbb{R}$ tak, żeby funkcja
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases},$$
była ciągła na $\mathbb{R}$.

12. Dobrać $a \in \mathbb{R}$ tak, żeby funkcja
$$f(x) = \begin{cases} 2+e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ \frac{\sin ax}{x}, & x > 0 \\ \lim_{x\to 0^-}(2+e^{\frac{1}{x}}, & x = 0. \end{cases},$$
była ciągła na $\mathbb{R}$.

13. Dobrać $a, b, c \in \mathbb{R}$ tak, żeby funkcja
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x}, & x < 0 \\ \frac{x^3-1}{x^2+x-2}, & 0 \leqslant x < 1, \\ c, & x = 1, \\ \frac{x^2+(b-1)x-b}{x-1}, & x > 1, \end{cases},$$
była ciągła na $\mathbb{R}$.

14. Oblicz (jeżeli istnieją) granice funkcji:

(a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\sin x-\cos x}$,
(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$,
(c) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$,
(d) $\lim_{x\to+\infty} \sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$,
(e) $\lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x$,
(f) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$,
(g) $\lim_{x\to 1} \tan\frac{\pi x}{2}$,
(h) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$.

15. Zbadaj, czy $f(x) = o(h(x))$ gdy $x \to x_0$, gdzie

(a) $f(x) = x^2$, $h(x) = x$, $x_0 = 0$,
(b) $f(x) = x$, $h(x) = x^2$, $x_0 = 0$,

(c) $f(x) = x - \sin x$, $h(x) = x$, $x_0 = 0$,
(d) $f(x) = x - \sin x$, $h(x) = x^2$, $x_0 = 0$,
(e) $f(x) = x - \sin x$, $h(x) = x^3$, $x_0 = 0$,
(f) $f(x) = \frac{1}{x} \tan \frac{1}{x}$, $h(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = +\infty$.

16. Zbadaj, czy $f(x) = O(h(x))$ gdy $x \to x_0$, gdzie

(a) $f(x) = 5x$, $h(x) = x$, $x_0 = +\infty$,
(b) $f(x) = x^2$, $h(x) = x$, $x_0 = +\infty$,
(c) $f(x) = \frac{x(x-1)}{2}$, $h(x) = x^2$, $x_0 = +\infty$,
(d) $f(x) = \sin x$, $h(x) = x$, $x_0 = 0$,
(e) $f(x) = \sin x - x$, $h(x) = x^3$, $x_0 = 0$,
(f) $f(x) = \sqrt{1 + x^2} - x$, $h(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = +\infty$,
(g) $f(x) = x$, $h(x) = x^2$, $x_0 = +\infty$,
(h) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $h(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = +\infty$,
(i) $f(x) = \ln x$, $h(x) = x$, $x_0 = +\infty$,
(j) $f(x) = 3^{\log_2 x}$, $h(x) = x^2$, $x_0 = +\infty$,
(k) $f(x) = e^x - 1$, $h(x) = x$, $x_0 = 0$.

17. Zbadaj, czy $f(x) \sim h(x)$ gdy $x \to x_0$, gdzie

(a) $f(x) = x^2 + 2x$, $h(x) = x^2$, $x_0 = +\infty$,
(b) $f(x) = x^2$, $h(x) = x$, $x_0 = +\infty$,
(c) $f(x) = \log_2 x$, $h(x) = \ln x$, $x_0 = +\infty$,
(d) $f(x) = 1 + e^{-x} \sin x$, $h(x) = 1 + 2^{-x} \cos x$, $x_0 = -\infty$,