Zestaw 4 - pochodna funkcji, różniczkowalność.

1. Korzystając z definicji oblicz pochodne funkcji f w podanym punkcie x_0:

   (a) $f(x) = \sqrt{4x+1}$, $x_0 = 2$,

   (b) $f(x) = -2x^3 + 5x$, $x_0 = -1$,

   (c) $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $x_0 = 1$,

   (d) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$.

2. Oblicz pochodne następujących funkcji:

   (a) $f(x) = (\sqrt{x}+1)(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1)$,

   (b) $f(t) = (\sqrt[3]{t} + 2t)(1 + \sqrt[3]{t^2} + 3t)$,

   (c) $f(u) = \frac{2}{u^3-1}$,

   (d) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$,

   (e) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^4-t^8}}$,

   (f) $f(u) = 3\sin(3u+5)$,

   (g) $f(x) = \cos^2 x$,

   (h) $f(t) = 3\sin^2 t - \sin^3 t$,

   (i) $f(u) = \cos^3 4u$,

   (j) $f(x) = \sin\sqrt{1+x^2}$,

   (k) $f(t) = \sin(\arcsin t)$,

   (l) $f(u) = \arcsin\frac{2}{u}$,

   (m) $g(t) = \arctan^2\frac{1}{t}$,

   (n) $g(x) = \arctan(x - \sqrt{1+x^2})$,

   (o) $h(u) = \sqrt{\ln u}$,

   (p) $f(x) = \ln\sin x$,

   (q) $g(t) = \log_3 t$,

   (r) $f(u) = \log_5(u^2-1)$,

   (s) $h(x) = \ln\arctan\sqrt{1+x^2}$,

   (t) $g(t) = 10^t$,

   (u) $f(u) = e^{\sqrt{u^2+1}}$,

   (v) $f(u) = 3^{\sin u}$.

3. Oblicz pochodne następujących funkcji:

   (a) $f(x) = \frac{2x^4}{9-x^2}$,

   (b) $f(t) = \frac{t}{1-\cos t}$,

(c) $f(u) = u \arcsin u$,

(d) $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$,

(e) $f(t) = \frac{\ln t}{1+t^2}$,

(f) $f(u) = \frac{u}{4^u}$,

(g) $f(x) = x8^{x^2}$,

(h) $f(t) = \frac{e^t}{1+t^2}$.

4. Oblicz pochodne następujących funkcji:

(a) $f(x) = x^x$,

(b) $f(x) = x^{\sin x}$,

(c) $f(x) = \sin x^{\cos x}$,

(d) $f(x) = x^{x^x}$,

(e) $f(x) = \log_x 5$,

(f) $f(x) = \log x(x^2+3)$.

5. Oblicz pochodne następujących funkcji:

(a) $f(x) = 9x^7 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^{-5} - 3x^{-11}$,

(b) $f(x) = \frac{5x^2+x-2}{x^2+7}$,

(c) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1-x}}$,

(d) $f(x) = \tan^4 2x$,

(e) $f(x) = x \arcsin x + \ln(1+x^2)$,

(f) $f(x) = \sin(3\cos x) \cdot \cos(5\sin^3 7x)$,

(g) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1-\cos x}}$,

(h) $f(x) = \arccos\sqrt{1-x^2}$,

(i) $f(x) = \sqrt{\ln x} + \arctan\frac{1-x}{1+x}$,

(j) $f(x) = \sqrt[x]{x}$,

(k) $f(x) = (\sin x)^x$,

(l) $f(x) = 2^{(\ln x)^x}$,

(m) $f(x) = 6^{(tgx)^x}$.

6. Oblicz (jeżeli istnieje) $f'(x_0)$ w podanym punkcie x_0:

(a)

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2+3x+1, & \text{gdy } x \leqslant 1, \\ x^2-3x+4, & \text{gdy } x > 1, \end{cases},$$

$x_0 = 1$,

(b)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x, & \text{gdy } x \leqslant 2, \\ x^2 - 7x + 8, & \text{gdy } x > 2, \end{cases},$$

$x_0 = 2$,

(c)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x > 0, \\ x(x+1)^2, & \text{gdy } x \leqslant 0, \end{cases},$$

$x_0 = 0$,

(d)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 4, & \text{gdy } x < 3, \\ x^2 - 3x + 4, & \text{gdy } x \geqslant 3, \end{cases},$$

$x_0 = 3$.

7. Zbadaj różniczkowalność następujących funkcji:

   (a) $f(x) = |x-1|^3 \cdot |x-2|$,

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$,

   (c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

   (d)

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2(x-4), & \text{gdy } x \in (3,4), \\ 0, & \text{gdy } x \notin (3,4), \end{cases}.$$

8. Zbadaj ciągłość i różniczkowalność następujących funkcji:

   (a)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} \cos \frac{1}{x} & \text{dla } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } \ x = 0 \end{cases},$$

   (b)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x(x-1)}{2} & \text{dla } \ x < 1 \\ \sqrt{x} - 1 & \text{dla } \ x \geqslant 1 \end{cases}.$$

9. Dla jakich parametrów p i q funkcja f jest ciągła i różniczkowalna w swojej dziedzinie:

   (a)

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } \ x < 0 \\ px^2 + qx & \text{dla } \ x \geqslant 0 \end{cases},$$

   (b)

$$g(x) = \begin{cases} pe^x + q & \text{dla } \ x \leqslant 0 \\ 2 - x & \text{dla } \ x > 0 \end{cases}.$$