Zestaw 5 - zastosowania rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej.

1. Oblicz granice:
   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x-\mathrm{tg}x}$,
   (b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}}$,
   (c) $\lim_{x\to \infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$,
   (d) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$,
   (e) $\lim_{x\to 0}[\ln(1+x)]^x$,
   (f) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$,
   (g) $\lim_{x\to -\infty}[(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}-x]$,
   (h) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$,
   (i) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x-1}{2\sin^2 x-1}$,
   (j) $\lim_{x\to 0^+} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$,
   (k) $\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln x$,
   (l) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$,
   (m) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$,
   (n) $\lim_{x\to 1^+} \ln x \ln(x-1)$.

2. Znajdź asymptoty funkcji:
   (a) $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$,
   (b) $f(x)=x\ln(e+\frac{1}{x})$,
   (c) $f(x)=\frac{1}{e^x-1}$,
   (d) $f(x)=x\ln\frac{x}{x-2}$,
   (e) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-t^4-t^8}}$,
   (f) $f(x)=\frac{x^2\arctan x}{x}$,
   (g) $f(x)=x-2\arctan x$,
   (h) $f(x)=\frac{x}{\ln x}$.

3. Sprawdź, czy podane funkcje spełniają twierdzenie Rolle'a na przedziale $\langle -1,1\rangle$. Jeśli tak, to wskaż odpowiedni punkt pośredni realizujący tezę twierdzenia.
   (a) $f(x)=x(x^2-1)$,
   (b) $f(t)=\frac{\pi}{4}-\arctan|x|$,
   (c) $f(u)=\sin\pi x$,
   (d) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$.

4. Zastosuj twierdzenie Lagrange'a do podanych funkcji. Podaj odpowiednie punkty pośrednie.
   (a) $f(x) = \arcsin x$, $x \in \langle -1, 1\rangle$,
   (b) $f(x) = \arctan x$, $x \in \langle -1, \sqrt{3}\rangle$.
5. Udowodnij równości:
   (a) $\mathrm{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,
   (b) $\mathrm{arctg} x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$, , $x \in (-1, 1)$,
   (c) $\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in [0, +\infty)$,
   (d) $\arctan x + \arctan \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$, dla $x \in (-1, +\infty)$,
   (e) $3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$, dla $|x| \leqslant \frac{1}{2}$,
   (f) $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, dla $x > 0$.
6. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a udowodnij nierówności:
   (a) $2x \cdot \mathrm{arctg} x \geqslant \ln(1 + x^2)$ dla $x \in \mathbb{R}$,
   (b) $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$ dla $x \in \mathbb{R}$,
   (c) $x > \ln(1 + x)$ dla $x > 0$,
   (d) $\ln(1 + x) > \frac{\arctan x}{1+x}$ dla $x > 0$,
   (e) $\frac{\alpha-\beta}{\cos^2 x} \leqslant \tan\alpha - \tan\beta \leqslant \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}$ dla $0 < \beta \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$.
7. Zbadaj istnienie ekstremów lokalnych oraz podaj przedziały monotoniczności dla funkcji określonych wzorami:
   (a) $f(x) = x^2 e^{\frac{-x^2}{2}}$,
   (b) $f(x) = (x - 5)^2 \sqrt[3]{(x + 1)^2}$,
   (c) $f(x) = (x + 1)^3 \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$
   (d) $f(x) = |x^2 - 1|$,
   (e) $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + 2x - 5$,
   (f) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$,
   (g) $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$,
   (h) $f(x) = (x^2 - 2x)\ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x$.
8. Znajdź najmniejsze i największe wartości funkcji:
   (a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, na przedziale $[0, 2]$,
   (b) $f(x) = \mathrm{arctg}\frac{1-x}{1+x}$, na przedziale $[0, 1]$,
   (c) $f(x) = |x^2 - 6x - 7|$, na przedziale $[0, 9]$,
   (d) $f(x) = x^{-x}$, na przedziale $(0, +\infty)$.

9. Udowodnij nierówności:
   (a) $\ln x < \sqrt{x}$, dla $x > 0$,
   (b) $\ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) < \frac{1}{x} + \ln x$, dla $x > 0$,
   (c) $\frac{\ln x}{x-1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$ dla $x > 0,\ x \neq 1$,
   (d) $\frac{2}{2x+1} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$, dla $x > 0$.
10. Zbadaj przebieg zmienności zadanych funkcji i narysuj ich wykresy:
    (a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$,
    (b) $f(x) = \frac{x-1}{x\sqrt{x}}$,
    (c) $f(x) = |x|e^{-x^2}$,
    (d) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$,
    (e) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}e^{-\frac{x^2}{3}}$,
    (f) $f(x) = \frac{x^4}{x^3-x}$,
    (g) $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$,
    (h) $f(x) = \sqrt[3]{-x^3 + 3x + 2}$,
    (i) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$,
    (j) $f(x) = (x - 2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-2}}$,
    (k) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1-x^2}}$,
    (l) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$,
11. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ w jej punkcie przegięcia.
12. Pokazać, że funkcja $f(x) = xe^{-x^2}$ jest różnowartościowa na przedziale $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$.
13. Znaleźć p takie, aby funkcja $f(x) = x^3 - px + 5x - 2$ osiągała minimum w punkcie $x = 5$.
14. Zbadać wypukłość i punkty przegięcia funkcji $f(x) = x^2 \ln x$.
15. W zależności od a podać liczbę rozwiązań równania $\ln x = ax$.
16. Pokazać, że równanie $x^3 + x - 3 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie na przedziale $(1, 2)$.
17. Który z ostrosłupów prawidłowych o podstawie kwadratowej i sumie długości wszystkich krawędzi równej a ma największą objętość?
18. W trójkąt prostąkątny o zadanym kącie α i przeciwprostokątnej długości c wpisujemy prostokąty w ten sposób, że jeden bok każdego z tych prostokątów ma największe pole?

19. Ze wszystkich stożków opisanych na kuli o promieniu R wyznaczyć ten, który ma najmniejszą objętość.

20. W wycinek koła o promieniu 1 i kącie środkowym $\frac{\pi}{4}$ wpisujemy prostokąt w ten sposób, że jeden bok leży na promieniu skrajnym tego wycinka, jeden z wierzchołków na łuku wycinka, a pozostały na drugim promieniu skrajnym. Jakie powinny być wymiary prostokąta o największym polu?

21. Ciało stałe o temperaturze T wysyła promieniowanie złożone z fal o różnych długościach λ i natężeniu $I = I(\lambda)$ danym wzorem

$$I(\lambda) = \frac{c}{\lambda^5} e^{-k/\lambda T},$$

gdzie c i k są pewnymi stałymi. Wyznaczyć takie λ, aby $I(\lambda)$ było największe.