

Zestaw 6 - wzór Taylora.

1. Rozwinąć w szereg Maclaurina następujące funkcje:

(a) $f(x) = x^2 e^x$,

(b) $f(x) = e^x \sin x$,

(c) $f(x) = \sin 3x$,

(d) $f(x) = \ln(1 + e^x)$,

(e) $f(x) = e^{-x^2}$,

(f) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$,

(g) $f(x) = \sin^2 x$,

(h) $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$,

(i) $f(x) = \frac{1}{x-1}$,

(j) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$,

(k) $f(x) = \sin x \cos x$,

2. Obliczyć wartość $\frac{1}{e}$ z dokładnością do 0,001, wykorzystując rozwinięcie funkcji e^x w szereg Maclaurina.

3. Obliczyć wartość $\cos^2 0.2$ z dokładnością do 0,0001, wykorzystując rozwinięcie funkcji $\cos^2 x$ w szereg Maclaurina.

4. Obliczyć wartość $\ln 1.2$ z dokładnością do 0,001.

5. Obliczyć wartość $\sqrt{101}$ z dokładnością do 0,001.

6. Obliczyć wartość π z dokładnością do 0,0001, wykorzystując rozwinięcie funkcji $\arctan x$ w szereg Maclaurina (wskazówka: $\pi = 4 \arctan 1$).

7. Rozwinąć w szereg Taylora funkcje:

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$ w otoczeniu punktu $x_0 = 3$,

(b) $f(x) = \cos^2 x$ w otoczeniu punktu $x_0 = \frac{1}{3}\pi$.

8. Napisać wzór Taylora z resztą Lagrange'a dla następujących funkcji:

(a) $f(x) = \ln x$, $x_0 = e$, $n = 4$,

(b) $f(x) = e^{\cos x}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $n = 2$,

(c) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$, $n = 5$.

9. Oszacuj błąd wzoru przybliżonego $\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$ dla $|x| \leq \frac{1}{2}$.

10. Dla jakich x odpowiedni wielomian w przybliży daną funkcję z dokładnością do $\frac{1}{100}$:

(a) $f(x) = \sin x$, $w(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$,

(b) $f(x) = \cos x$, $w(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$.

11. Najślynniejszy wniosek z teorii względnosci mówi, że masa ciała poruszającego się z szybkością v jest równa

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1)$$

gdzie m_0 jest masą spoczynkową ciała, a c jest równa szybkości światła.

- (a) Wykazać, że $m \approx m_0 + \frac{m_0}{2c^2}v^2$.
- (b) Wykorzystując powyższe przybliżenie oszacować z jaką szybkością powinno poruszać się ciało, aby jego masa zwiększyła się o 10%. Następnie wyliczyć v bezpośrednio ze wzoru (1).