Zestaw 10 - funkcje wektorowe.

1. Wyznaczyć macierze Jacobiego oraz obliczyć jakobiany następujących przekształceń:

   (a) $f(u,v)=(x,y)$, gdzie $x=u$, $y=uv$,

   (b) $f(u,v)=(x,y)$, gdzie $x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(u-v)$,

   (c) $f(u,v)=(x,y)$, gdzie $x=\frac{u}{u^2+v^2}$, $y=\frac{v}{u^2+v^2}$,

   (d) $f(u,v)=(x,y)$, gdzie $x=u$, $y=v\sqrt{u}$,

   (e) $f(u,v)=(x,y)$, gdzie $x=2u+3v$, $y=u-v$,

   (f) $f(u,v)=(x,y)$, gdzie $x=\sqrt[3]{uv^2}$, $y=\sqrt[3]{u^2v}$,

   (g) $f(u,v,w)=(x,y,z)$, gdzie $x=u+v-w+3$, $y=2u-v+w+2$, $z=u+2v+w+1$,

   (h) $f(r,\phi,h)=(x,y,z)$, gdzie $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$, $z=h$.

2. Dane są odwzorowania $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. Znaleźć macierz Jacobiego oraz jakobian odwzorowania $g\circ f$, gdzie

   (a)
   $$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x\cos y, x\sin y, z),\\ g(u,v,w) &= (uvw, uv-uvw, v-uv), \end{aligned}$$

   (b)
   $$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x\cos y, x\sin y, z),\\ g(u,v,w) &= (u\sin v\cos w, u\sin v\sin w, u\cos v), \end{aligned}$$

   (c)
   $$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x\sin y\cos z, x\sin y\sin z, x\cos y),\\ g(u,v,w) &= (\cos u, \sin u\cos v, \sin u\sin v\cos w). \end{aligned}$$

3. Wykorzystując reguły różniczkowania funkcji złożonych obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f względem x i y:

   (a) $f(u,v)=\ln\frac{u}{v+1}$, gdzie $u=x\sin y$, $v=x\cos y$,

   (b) $f(u,v)=e^{uv}$, gdzie $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\arctan\frac{y}{x}$,

   (c) $f(u,v,w)=\arcsin\frac{u}{v+w}$, gdzie $u=e^{\frac{x}{y}}$, $v=x^2+y^2$, $w=2xy$,

   (d) $f(u,v,w)=u^2-v(\sqrt{u}-w)$, gdzie $u=x^2y^2$, $v=\frac{x}{y}$, $w=2x-y$.

4. Dane są odwzorowania $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$. Korzystając z macierzy Jacobiego funkcji f i g wyznaczyć $\frac{d(g\circ f)}{dt}$, wiedząc, że

   $$\begin{aligned} f(x,y) &= x^y,\\ g(t) &= (3t^2, \sqrt{t^2+1}). \end{aligned}$$

Anna Wasieczko

5. Dane są odwzorowania $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Wyznaczyć macierz Jacobiego odwzorowania $g \circ f$, jeżeli

   (a)
   $$f(x, y) = xy,$$
   $$g(t) = (t^3, t^2, t),$$

   (b)
   $$f(x, y) = x^2 + y^2,$$
   $$g(t) = (t, t^2, t^3),$$

   (c)
   $$f(x, y) = ax + by,$$
   $$g(t) = (\sin t, \cos t, t).$$

6. Dane są odwzorowania $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Wyznaczyć macierz Jacobiego oraz jakobian odwzorowania $g \circ f$, wiedząc, że
   $$f(x, y, z) = x + 2y + 3z,$$
   $$g(t) = (4, 4t, t^2).$$

7. Rozwiązać podane równania różniczkowe dokonując zamiany zmiennych (ze zmiennych (x, y) na zmienne (u, v)), gdzie

   (a)
   $$z'_x = z'_y,\ z = f(x, y),\ u = x + y,\ v = x - y,$$

   (b)
   $$yz'_x - xz'_y = 0,\ z = f(x, y),\ u = x,\ v = x^2 + y^2,$$

   (c)
   $$xz'_x + yz'_y = z,\ z = f(x, y),\ u = x,\ v = \frac{y}{x}.$$

8. Dane jest pole wektorowe $F = (P, Q, R)$. Sprawdzić czy F jest polem potencjalnym, jeżeli składowe pola dane są jako

   (a)
   $$P = x^2 - 2y,\ Q = 3x^2y - 5z,\ R = 5z^2 - 3xy + y^2 - 1,$$

   (b)
   $$P = 2xe^{3y} + z^2,\ Q = 3x^2e^{3y} + z,\ R = 2zx + y.$$

   (c)
   $$P = 4xy^3z^4 - 3y^2 - 3y^3 - 16x^3z,$$
   $$Q = 6x^3y^2z^4 - 6xy + 2z^3,$$
   $$R = 8x^2z^3y^3 + 6yz^2 - 4x^4.$$

9. Dane jest potencjalne pole wektorowe $F = (P, Q, R)$ o składowych
$$P = 25x^4y - 3y^2,\ \ Q = 5x^5 - 6xy - 5,\ \ R = 0.$$
Wyznaczyć funkcję U określającą potencjał w każdym punkcie pola, jeżeli wiadomo, że $U(0,0,0) = 1$.

10. Dane jest pole wektorowe $F = (P, Q, R)$ o składowych
$$P = yz(2x + y + z),\ \ Q = xz(x + 2y + z),\ \ R = xy(x + y + 2z).$$
Wykazać, że F jest polem potencjalnym i znaleźć jego potencjał.

11. Obliczyć dywergencję i rotację pola wektorowego F, gdzie
    (a) $F(x, y, z) = (\ln x, e^{xyz}, \sin^2(yz)$,
    (b) $F(x, y, z) = (\frac{8}{x^2}, 0, 6\cos^2(y - z))$,
    (c) $F(x, y, z) = (y^2 + z^2, z^2 + x^2, x^2 + y^2)$.

12. Wykorzystując rotację danego pola wektorowego sprawdzić, czy pole to jest potencjalne:
    (a) $F(x, y, z) = (\frac{1}{y} + 2x, -\frac{x}{y^2} + 2z, 2y - 2z)$,
    (b) $F(x, y, z) = (x^2y + z, 3yz + 3x, xyz)$.