

**Zestaw 3 - całki oznaczone i ich zastosowania**

1. Skrypt, zadania **8.13-8.14** (str. 92). Ponadto obliczyć następujące całki oznaczone:

1)  $\int_1^e \ln x dx,$

2)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx,$

3)  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+6x+10},$

4)  $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \sin x^2 dx,$

5)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx,$

6)  $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx,$

7)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}.$

2. Obliczyć pola obszarów ograniczonych:

(a) parabolą  $4y = 8x - x^2$  i prostą  $4y = x + 6,$

(b) parabolami  $y = 4 - x^2$  i  $y = x^2 - 2x,$

(c) krzywymi  $6x = y^3 - 16y$  i  $24x = y^3 - 16y,$

(d) hiperbolą  $xy = 6$  i prostą  $y = 7 - x,$

(e) krzywymi  $y = e^{-x}, y = e^{3x}$  oraz  $y = \sqrt{e}.$

3. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi

(a)  $r = a \sin 3\phi,$  gdzie  $a \geq 0,$

(b)  $r = 4 \sin \phi,$

(c)  $r^2 = 2a^2 \cos \phi,$

(d)  $r = a \cos \phi + b,$  gdzie  $b \leq a;$

(e)  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$

(f)  $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2.$

4. Obliczyć pole figury ograniczonej lemniskatą Bernoulliego  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  i leżącej wewnątrz okręgu  $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}.$

5. Obliczyć objętości brył powstałych z obrotu podanych figur  $T$  wokół wskazanych osi:

(a)  $T : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \cos x, Ox,$

(b)  $T : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq e^x, Oy,$

(c)  $T : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, Oy,$

(d)  $T : 2y \geq x^2, 2x + 2y - 3 \leq 0, Ox.$

6. Obliczyć pola powierzchni brył powstałych z obrotu wykresów podanych funkcji wokół wskazanych osi:
- (a)  $f(x) = x^3, 0 \leq x \leq 1, Ox,$
  - (b)  $f(x) = 2\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1, Oy,$
  - (c)  $f(x) = x^3, -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, Ox,$
  - (d)  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, x > 0, y > 0, Ox.$
7. Skrypt, zadania **10.11-10.15** (str. 109-110).
8. Obliczyć długość łuku danego równaniem
- (a)  $y^2 = (x - 1)^3$  od punktu  $A = (2, -1)$  do  $B = (5, -8)$
  - (b)  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$  dla  $0 \leq t \leq 2\pi.$
9. Obliczyć obwód figury ograniczonej krzywymi  $y^3 = x^2$  i  $y = \sqrt{(2 - x^2)}$ .