Zestaw 6 - granice funkcji wielu zmiennych

1. Znaleźć dziedzinę następujących funkcji, a następnie przedstawić ją graficznie:
   (a) $f(x,y) = \frac{1}{x-y}$,
   (b) $f(x,y) = \operatorname{ctg}(x-y)$,
   (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}$,
   (d) $f(x,y) = \ln(xy)$,
   (e) $f(x,y) = \ln(y^2-4x+8)$.
2. (*) Naszkicować powierzchnie:
   (a) $x^2+y^2+z^2=4,\ x,y,z \geqslant 0$,
   (b) $z = xy$,
   (c) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-z=0$,
   (d) $x^2+y^2=8z$,
   (e) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$.
3. Obliczyć (o ile istnieją) granice funkcji:
   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,
   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2y^2}$,
   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$,
   (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$,
   (e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$,
   (f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$,
   (g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$,
   (h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^4y^4)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$,
   (i) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \log_x(x+y)$,
   (j) (*) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$,
   (k) $\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.
4. Zbadać istnienie granicy funkcji f w punkcie $A=(0,0)$. Jeżeli granica istnieje, to podać jej wartość:
   (a) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$,
   (b) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$,
   (c) $f(x,y) = \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$,

(d) (*)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x}, & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases},$$

(e) (*)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x-y}, & \text{dla } x \neq y \\ 0 & \text{dla } x = y \end{cases}.$$

5. (*) Obliczyć o ile istnieją, granice iterowane i sprawdzić, czy istnieje granica funkcji:

   (a) $f(x,y) = x \sin \frac{1}{y}$ w punkcie $(0,0)$,

   (b) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ w punkcie $(0,0)$.

6. Zbadać ciągłość następujących funkcji:

   (a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}, & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dla } x = y = 0 \end{cases},$$

   (b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dla } x = y = 0 \end{cases},$$

   (c)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dla } x = y = 0 \end{cases},$$

   (d)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}, & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dla } x = y = 0 \end{cases},$$

7. (*) Wykazać, że funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}|x-y|, & \text{dla } y > x \\ 0, & \text{dla } y \leqslant x \end{cases},$$

   jest ciągła w każdym punkcie płaszczyzny.

8. (*) Wykazać, że funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{gdy } x, y \notin \mathbb{Q} \\ -1, & \text{w.p.p} \end{cases},$$

   jest nieciągła w każdym punkcie płaszczyzny.