Zestaw 7 - pochodne funkcji wielu zmiennych

1. Obliczyć pochodne cząstkowe I rzędu następujących funkcji:

   (a) $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$,
   (b) $f(x,y) = \arctan\frac{x}{y}$,
   (c) $f(x,y) = \ln x^2 + y^2$,
   (d) $f(x,y) = \ln(x + \ln y)$,
   (e) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,
   (f) $f(x,y,z) = (\sin x)^{yz}$,
   (g) $f(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

2. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu następujących funkcji w podanych punktach:

   (a) $f(x,y) = x + y - \sqrt{x^2+y^2}$, w punkcie $(3,4)$,
   (b) $f(x,y) = \ln(x + \frac{y}{2x})$, w punkcie $(1,2)$,
   (c) $f(x,y,z) = xy^2 + yz^2 + xz$, w punkcie $(1,-1,1)$.

3. (*) Zbadać różniczkowalność następujących funkcji:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$,
   (b) $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$,
   (c)
   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}, & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$
   (d)
   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$
   (e)
   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

4. Wykazać, że funkcja $u(x,y) = \ln(e^x + e^y)$ spełnia równanie różniczkowe
   $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1.$$

5. (*) Niech ϕ będzie funkcją różniczkowalną na $\mathbb{R}$. Pokazać, że funkcja $z = y\phi(x^2 - y^2)$ spełnia równanie różniczkowe
   $$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

6. (*) Niech ϕ będzie funkcją różniczkowalną na $\mathbb{R}$. Pokazać, że funkcja $z = \phi(\frac{y}{x}) - x^2 - y^2$ spełnia równanie różniczkowe

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = -2x^2 - 2y^2.$$

7. Znaleźć gradient, a następnie obliczyć pochodne kierunkowe następujących funkcji:

   (a) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2xy + 1$, w punkcie $(x_0, y_0) = (1,2)$ w kierunku wektora $\vec{a} = (3,-1)$,

   (b) $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$ w punkcie $(x_0, y_0) = (1,0)$ w kierunku wersora tworzącego z osią OX kąt $120°$.

   (c) $g(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, w punkcie $(x_0, y_0) = (1,1)$ w kierunku wersora dwusiecznej pierwszej ćwiartki,

   (d) $h(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2+1}$, w punkcie $(x_0, y_0, z_0) = (0,-1,2)$ w kierunku wektora $\vec{a} = (2,3,1)$,

   (e) $f(x,y) = x^2 + xy + 3y - 1$, w punkcie $(x_0, y_0) = (1,1)$ w kierunku wektora $\vec{a} = (2,1)$,

   (f) $g(x,y) = \sqrt{x+y}$, w punkcie $(x_0, y_0) = (4,5)$ w kierunku wektora $\vec{a} = (-1,1)$,

   (g) $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$, w punkcie $(x_0, y_0, z_0) = (1,0,-1)$ w kierunku wektora $\vec{a} = (0,1,2)$.

8. Znaleźć gradient funkcji $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$ w punkcie $A = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, a następnie wykorzystując tę informację obliczyć pochodną kierunkową funkcji f w punkcie A w kierunku wersora stycznej w tym punkcie do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 2x$.

9. (*) Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Wykazać, że funkcja ta ma w punkcie $(0,0)$ pochodną kierunkową w dowolnym kierunku, ale nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$.