Zestaw 8 - styczne i normalne do krzywych i powierzchni.

1. Znaleźć równania stycznej oraz normalnej do krzywej w danym punkcie M

   (a) $x^2 + y^3 = 0, M = (1, -1)$,
   (b) $y = x^3 - 2x + 1,\ M = (1, 0)$,
   (c) $x^2 - 2xy + y^2 - x + 1 = 0,\ M = (2, 1)$,
   (d) $x^2y^3 - y^2 - 4 = 0,\ M = (1, 2)$,
   (e) $x^3 - py^2 = 0,\ M = (p, p)$.

2. Znaleźć równania stycznych do następujących krzywych w danym punkcie t_0

   (a) $x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = t^2,\ t_0 = 1$,
   (b) $x = \frac{1}{\cos t},\ y = \tan t,\ z = t,\ t_0 = \frac{\pi}{4}$,
   (c) $x = r(t - \sin t),\ y = r(1 - \cos t),\ z = 4r \sin \frac{1}{2}t,\ t_0 = \frac{\pi}{2}$.

3. Znaleźć równania płaszczyzn stycznych i normalnych do następujących powierzchni w danym punkcie M

   (a) $z = x^2 + y^2,\ M = (1, 2, 5)$,
   (b) $x + y + z = 1,\ M = (1, 0, 0)$,
   (c) $z = x^2 + y^2,\ M = (1, 0, 1)$,
   (d) $x^3 + y^3 + z^3 - 36 = 0, M = (2, 1, 3)$,
   (e) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 - x^2 + y^2 - z^2 - 8 = 0,\ M = (1, 1, 1)$,
   (f) $y + \ln \frac{x}{z} - z = 0,\ M = (1, 1, 1)$.

4. Wykazać, że powierzchnie dane równaniami $x + 2y - \ln z + 4 = 0$, $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ są styczne w punkcie $A = (2, -3, 1)$ (tzn. mają w tym punkcie wspólną płaszczyznę styczną).