ALGEBRA - Zestaw 5: Wyznaczniki, rząd i macierz odwrotna

Zad 1) Zbadaj rzędy następujących macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 3 & 10 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ -3 & -1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zad 2) Wyznacz rzędy następujących macierzy w zależności od parametru rzeczywistego p:

$$A = \begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} p-1 & p-1 & 1 & 1 \\ 1 & p^2-1 & 1 & p-1 \\ 1 & p-1 & p-1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zad 3) Oblicz wyznacznik macierzy i jeśli jest ona nieosobliwa, znajdź macierz do niej odwrotną:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -9 \end{bmatrix}$ f*) $F_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$

Zad 4) Niech A będzie macierzą kwadratową. Udowodnij, że:

a) jeżeli $A^2 - A + I = 0$, to A jest nieosobliwa i $A^{-1} = I - A$;

b) jeżeli $A^k = \mathbf{0}$, to $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}$ (dla $k \geqslant 1$).

Zad 5) Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy rzeczywistej A stopnia n, jeżeli:

a) $A^2 = A^T$ b) $A^T - A^{-1} = \mathbf{0}$ c) $A^2 + A^{-1} = \mathbf{0}$