KOLOKWIUM 1 - Matematyka III, 20 listopada 2015

1. (19 pkt.) Wykazać zbieżność lub rozbieżność następujących szeregów. W przypadku gdy nie wszystkie wyrazy szeregu są dodatnie rozstrzygnij czy szereg jest zbieżny warunkowo czy bezwzględnie.

   (a) (8 pkt.)
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}},$$

   (b) (7 pkt.)
   $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2},$$

   (c) (4 pkt.)
   $$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}.$$

2. (8 pkt.) Wykazać, że następujący szereg funkcyjny jest zbieżny jednostajnie w zbiorze $X = [0, +\infty)$
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n-x}}{n! + x}.$$

3. (12 pkt.) Wyznaczyć obszar zbieżności następującego szeregu, a następnie obliczyć jego sumę w każdym punkcie wyznaczonego obszaru
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+3)(x-1)^n}{3^n}.$$

4. (12 pkt.) Rozwinąć funkcję $f(x) = \ln(1 + 3x + 2x^2)$ w szereg potęgowy o środku w punkcie $x_0 = 0$. Wyznaczyć obszar zbieżności otrzymanego szeregu.

5. (9 pkt.) Zapisać definicję szeregu zbieżnego bezwzględnie oraz warunkowo, a następnie podać twierdzenie o zbieżności szeregu bezwzględnie zbieżnego. Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne? Odpowiedź uzasadnić.