Zestaw 1 - szeregi liczbowe

1. Znaleźć sumę szeregu, lub wykazać, że jest on rozbieżny

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,

   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$,

   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$,

   (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+3)}$,

   (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$,

   (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$,

   (g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$,

   (h) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$,

   (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^n$.

2. Stosując warunek konieczny zbieżności szeregu pokazać, że następujące szeregi są rozbieżne

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(-1)^n n}$,

   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(\sin\frac{1}{n})$,

   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$,

   (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$,

   (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{n+100}$,

   (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{100n^2+1}$,

   (g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\ln n}$,

   (h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{1000}}$.

3. Stosując kryterium porównawcze zbadać zbieżność następujących szeregów

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n\sqrt{n+1}}}$,

   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,

   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}(\sqrt{n^2+n\sqrt{n}}-\sqrt{n^2-n\sqrt{n}})$.

   (d) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$,

   (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})$,

   (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}$,

   (g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{n}}}{n}$,

   (h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \pi^{-n}}{n^2}$,

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n}$,
(j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \tan^2 \frac{1}{n}$,
(k) $\sum_{n=1}^{+\infty} \tan \frac{\pi}{4^n}$,
(l) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n(n+1)(n+2)(n+3)}}$,
(m) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2-n}$,
(n) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$,
(o) $\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin \frac{1}{n^3}$,
(p) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+\sin n}{n}$.

4. Stosując kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność następujących szeregów

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^n}{n!}$,
(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,
(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$,
(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$,
(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n \ln(n!)}$,
(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$,
(g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 e^n}$,

5. Stosując kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność następujących szeregów

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\arctan(n^2+1))^n$,
(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$,
(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$,
(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$,
(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(2n+\frac{1}{n})^n}$,
(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$,
(g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} 2^n$.

6. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(-1)^n-n}$ stosując kryterium Cauchy'ego. Pokazać, że szereg ten nie reaguje na kryterium d'Alemberta.

7. Stosując kryterium ilorazowe zbadać zbieżność następujących szeregów

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^3-n^2+2}{n^5-n^3+3}$,
(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$,

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n-2^n}{4^n-3^n}$,
(d) $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\cos\frac{1}{n})$,
(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \arcsin\frac{1}{n}$,
(f) $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-n\sin\frac{1}{n})$,
(g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,ctg} n}{n}$,
(h) $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{3}-1)$,
(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(\frac{n^2+1}{n^2})$,
(j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3^n+1)^3}{(5^n+1)^2}$,
(k) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$,
(l) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}$.

8. Stosując kryterium całkowe zbadać zbieżność następujących szeregów
   (a) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n}$,
   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$,
   (c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$,
   (d) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ln(\frac{n+1}{n-1})$,
   (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n+1}$,
   (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2+9}$,
   (g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{e^n}$,
   (h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$,
   (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n}$.

9. Stosując kryterium Leibniza zbadać zbieżność następujących szeregów naprzemiennych
   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$,
   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$,
   (c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}$,
   (d) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln^2 n}\cos\pi n^2$,
   (e) $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n(\frac{2n+100}{3n+1})^n$,
   (f) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$,
   (g) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$,
   (h) $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$,
   (i) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n^{(-1)^n})}{\pi^n}$,

(j) $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n-\ln n}$,

10. Zbadać zbieżność następujących szeregów, a w przypadkach gdy nie wszystkie wyrazy szeregu są dodatnie rozstrzygnąć, czy szereg jest zbieżny warunkowo czy bezwzględnie:

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^n$,
    (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$,
    (c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$,
    (d) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$,
    (e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\frac{1}{n\sqrt{n}}$,
    (f) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$,
    (g) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[2]{n}}$,
    (h) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$,
    (i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+\ln^2 n}$,
    (j) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1-2n}{3n+2})^n$,
    (k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$,
    (l) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n\ln(\ln n)}$,
    (m) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^3+n}$,
    (n) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi^n+\frac{1}{n})}{n^2+1}$,
    (o) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{3^n}$,
    (p) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$,
    (q) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^3+1}$,
    (r) $\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{\ln n})^n$,
    (s) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{1}{n})$.

11. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$,
    (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$,
    (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\arctan n}{\pi}\right)^n$,
    (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+3}$,
    (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$,
    (f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n}{e^n+3^n}$,
    (g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$,
    (h) $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n^2}$,

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^2 \frac{1}{\sqrt{n}}$,

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$,

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$,

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}+2^n}$,

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!+2^n}{n^3-n}$,

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{\arctan(-n)}$,

(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3n}+(n!)^2}{(3n)!+n!}$,

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n}$,

(q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{n}}{\tan \frac{1}{\sqrt{n}}}$.

(r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$,

(s) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin \frac{1}{n} \tan \frac{1}{n})$,

(t) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$,

(u) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$,

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n$,

(w) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n})$,

(x) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \sqrt{n+1} - \cos \sqrt{n}}{n}$,

(y) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2}$,