

Zestaw 2 - ciągi i szeregi funkcyjne

1. Zbadać zbieżność punktową (wyznaczyć obszary zbieżności i funkcje graniczne) podanych niżej ciągów funkcyjnych. Czy zbieżność tych ciągów jest jednostajna na ich obszarach zbieżności?

(a) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n,$

(b) $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{1+nx},$

(c) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2},$

(d) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2},$

(e) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2},$

(f) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2},$

(g) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}},$

(h) $f_n : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n},$

(i) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \arctan nx,$

(j)

$$f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} -nx + 1, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0, & x > \frac{1}{n} \end{cases}.$$

2. Korzystając z Kryterium Weierstrassa zbadać czy następujące szeregi funkcyjne są zbieżne jednostajnie w zbiorze X :

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}, X = \mathbb{R},$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(1+n^2x^2)}, X = \mathbb{R},$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx}{1+n^4x^4}, X = [\alpha, +\infty), \alpha > 0,$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}, X = [\alpha, +\infty), \alpha > 0,$

(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}, X = [\alpha, +\infty), \alpha > 1,$

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{1+nx}}, X = [0, +\infty),$

(g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n!}, X = \mathbb{R},$

(h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}n!}{n^{2n}} \cos 2nx, X = \mathbb{R},$

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx^2}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}, X = \mathbb{R}.$

3. Wyznaczyć promień i zbiór zbieżności dla następujących szeregów potęgowych

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} n!(x-1)^n,$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} (x+2)^{n+1},$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n (x-\frac{1}{2})^n.$

4. Wyznaczyć promień i przedział zbieżności dla następujących szeregów potęgowych, zbadać ich zbieżność na krańcach przedziału zbieżności, a następnie obliczyć jego sumę w każdym punkcie wyznaczonego zbioru zbieżności

- (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} 10^n x^n$,
- (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n10^{n-1}}$,
- (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)(x-2)^n$,
- (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+3)4^n}$,
- (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+3}{5^n} x^{2n}$,
- (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n x^{3n}}{n+1}$,
- (g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)(x+1)^n}{6^n}$,
- (h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4^n(n+1)(n+2)}$,
- (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n(x-\frac{1}{2})^n}{n+1}$,
- (j) $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$,
- (k) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$,
- (l) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(2n+1)}{6^n} x^{2n}$,
- (m) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$,
- (n) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$,

5. Pokazać, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest równość

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} x^{2n+1}.$$

6. Rozważmy funkcję $f(x) = \arctan x$.

- (a) Rozwinąć funkcję f w szereg Taylora o środku w punkcie 0.
- (b) Określić obszar zbieżności otrzymanego szeregu.
- (c) Korzystając z otrzymanego rozwinięcia obliczyć $f^{(50)}(0)$ oraz $f^{(101)}(0)$.

7. Bez wyliczania pochodnych rozwinąć dane funkcje w szereg Taylora o środku w punkcie x_0 (określić obszary zbieżności)

- (a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$,
- (b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 2$,
- (c) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $x_0 = 0$,
- (d) $f(x) = \ln|x^2 + 3x + 2|$, $x_0 = 0$,
- (e) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 3$,

- (f) $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+7}$, $x_0 = -2$,
 (g) $f(x) = e^x$, $x_0 = 2$,
 (h) $f(x) = e^{2x+1}$, $x_0 = 0$,
 (i) $f(x) = x^2 e^x$, $x_0 = 0$,
 (j) $f(x) = x \arctan x^2$, $x_0 = 0$,
 (k) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$,
 (l) $f(x) = \sin 3x$, $x_0 = 0$,
 (m) $f(x) = x^2 \cos 5x$, $x_0 = 0$,
 (n) $f(x) = \ln(16 + x^4)$, $x_0 = 0$,
 (o) $f(x) = \ln(1 + 3x + 2x^2)$, $x_0 = 0$,
 (p) $f(x) = \frac{x}{2-x}$, $x_0 = 0$,
 (q) $f(x) = \arctan(2x)$, $x_0 = 0$,
 (r) $f(x) = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$, $x_0 = 0$,
 (s) $f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3}$, $x_0 = 0$,
 (t) $f(x) = \frac{7x+3}{(1-x)(4x+2)}$, $x_0 = 0$.

8. (*) Funkcja f jest określona na \mathbb{R} wzorem $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4+x^4}$. Pokazać, że funkcja f jest ciągła na \mathbb{R} i obliczyć $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.
9. Funkcja f jest określona na \mathbb{R} wzorem $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n3^{n-1}x^{n-1}$. Pokazać, że funkcja f jest ciągła na $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ i obliczyć $\int_0^{\frac{1}{8}} f(x)dx$.
10. Korzystając z rozwinięcia funkcji $\arctan x$ w szereg potęgowy obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$.
11. Korzystając z rozwinięcia funkcji $\ln(1+x)$ w szereg potęgowy oraz z Twierdzenia Abela obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
12. Rozwinąć funkcję $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 13)$ w szereg potęgowy o środku w punkcie $x_0 = 3$. Wyznaczyć obszar zbieżności otrzymanego szeregu. Korzystając z otrzymanego rozwinięcia wyznaczyć $f^{(100)}(3)$ oraz $f^{(101)}(3)$.
13. Korzystając z własności szeregów potęgowych oblicz sumę szeregu liczbowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{4^n}$.