Zestaw 0 - transformata Laplace'a i jej zastosowania

W zadaniach 2 i 3 można korzystać z tablic Transformat Laplace'a dostępnych np. TUTAJ

1. Znaleźć transformaty Laplace'a następujących funkcji:

   (a)
   $$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sin^2 at, & t \geq 0 \end{cases},$$

   (b)
   $$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \cos^2 at, & t \geq 0 \end{cases},$$

   (c)
   $$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \cos at \cos bt, & t \geq 0 \end{cases},$$

   (d)
   $$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sin at \cos bt, & t \geq 0 \end{cases},$$

   (e)
   $$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t^2 \sin at, & t \geq 0 \end{cases},$$

   (f)
   $$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t \cos at, & t \geq 0 \end{cases}.$$

2. Stosując transformatę Laplace'a rozwiązać następujące równania różniczkowe przy zadanych warunkach początkowych:

   (a) $y' + 3y = 5e^{2t}$, $y(0) = 4$,
   (b) $y' + 2y = 6$, $y(0) = 0$,
   (c) $y' - y = xe^{2x}$, $y(0) = 0$,
   (d) $y'' + 4y' + 4y = (\cos t + 2\sin t)e^{-2t}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$,
   (e) $y'' - 2y' = (x^2 + x - 3)e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$,
   (f) $y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x}\sin x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

3. Stosując transformatę Laplace'a rozwiązać następujące układy równań różniczkowych przy zadanych warunkach początkowych:

   (a)
   $$\begin{cases} 3y' - 2z' &= 2y + 3z, \\ y' + 4z' &= -4y + z, \end{cases}, \; y(0) = 0, \; z(0) = 1,$$

   (b)
   $$\begin{cases} y' &= y + z + e^t, \\ z' &= 3y - z, \end{cases}, \; y(0) = 0, \; z(0) = 0,$$

(c)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' + 5y + 2z & = & 0, \\ z' - y + 7z & = & 0, \end{array} \right. , \; y(0) = 1, \; z(0) = 1,$$

(d)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' + 2y + 4z & = & 4t + 1, \\ z' + y - z & = & \frac{3}{2}t^2, \end{array} \right. , \; y(0) = 0, \; z(0) = 0,$$

(e)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'' + y - z & = & 0, \\ z'' - 3y + 3z & = & 0, \end{array} \right. , \; y(0) = 4, \; y'(0) = 0, \; z(0) = 0, \; z'(0) = 0.$$