Zestaw 1 - całka podwójna

1. Obliczyć całki podwójne

   (a) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 xydxdy$,

   (b) $\int\limits_0^a \int\limits_0^b xy(x-y)dxdy$.

2. Obliczyć całki podwójne po wskazanych prostokątach

   (a) $\iint\limits_D dxdy$, gdzie $D = [0,1] \times [0,2]$,

   (b) $\iint\limits_D x \sin y dxdy$, gdzie $D = [0,1] \times [0,\pi]$,

   (c) $\iint\limits_D \frac{y}{1+x^2} dxdy$, gdzie $D = [0,1] \times [0,1]$,

   (d) $\iint\limits_D xy \ln \frac{x}{y} dxdy$, gdzie $D = [1,e] \times [1,2]$.

3. Obliczyć całki podwójne po wskazanych obszarach D

   (a) $\iint\limits_D (2x+y-1)dxdy$, gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach $(1,1)$,$(5,3)$,$(5,5)$,

   (b) $\iint\limits_D (2x+1)dxdy$, gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach $(-1,1)$,$(1,1)$,$(0,0)$,

   (c) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{ax-x^2}}$, gdzie D jest obszarem ograniczonym parabolą $y^2 = -ax + a^2$ oraz osią Oy,

   (d) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{10+2x+y}}$, gdzie D jest obszarem ograniczonym parabolą $y = x^2$, osią Ox, prostą $x = -1$ oraz prostą $x = 3$,

   (e) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, gdzie $D : x^2 + y^2 - 2y \leq 0$,

   (f) $\iint\limits_D xdxdy$, gdzie $D : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0$,

   (g) $\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dxdy$, gdzie $D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0$,

   (h) $\iint\limits_D y^2\sqrt{R^2 - x^2} dxdy$, gdzie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq R^2\}$,

   (i) $\iint\limits_D \sin(x+y)dxdy$, gdzie D-trójkąt o wierzchołkach $A = (0,0)$, $B = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $C = (\pi, 0)$,

   (j) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$, gdzie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 4, \ x^2+y^2 \geq 1, \ y \geq x\}$,

   (k) $\iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dxdy$, gdzie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2-2x \leq 0\}$.

4. Obliczyć całkę $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}$.

Anna Wasieczko-Zając

5. Obliczyć objętości brył ograniczonych podanymi powierzchniami
   (a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$,
   (b) $z = 0$, $x = \pm a$, $y = \pm a$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$, $a > 0$, $z \geq 0$,
   (c) $z = a^2 - x^2$, $y = 2x$, $x + y = a$, $z = 0$, $x = 0$,
   (d) $z = x + y$, $xy = 1$, $xy = 2$, $x = y$, $y = 2x$, $z = 0$, $x, y > 0$,
   (e) $z = xy$, $x + y + z = 1$, $z = 0$,
   (f) $z = 2x^2 + y^2 + 1,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$,
   (g) $z = x^2 + y^2,\ z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$,
   (h) $x^2 + y^2 + z^2 = 5,\ x^2 + y^2 = z - 1$,
   (i) $z = 4 - x^2 - y^2,\ z^2 = 2x^2 + 2y^2\ (z \geq 0)$.
6. Obliczyć pole powierzchni:
   (a) części powierzchni $2xy - z^2 = 0$ wyciętej przez prostopadłościan, którego podstawa znajduje się w płaszczyźnie Oxy a wierzchołki w punktach $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 9)$, $(0, 9)$,
   (b) części powierzchni walca $x^2 + y^2 = 2$ ograniczonej płaszczyznami $x + z = 0$, $x - z = 0$, $x, y > 0$,
   (c) części powierzchni $z = 2xy$ ograniczonej walcem $x^2 + y^2 = 1$ oraz $x = 0$, $y = 0$,
   (d) części powierzchni $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, która jest zawarta wewnątrz walca $x^2 + y^2 = 2x$,
   (e) części powierzchni $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ zawartej między płaszczyznami $x, y, z = 0$,
   (f) części powierzchni $x^2+y^2+z^2 = R^2$ wyciętej walcem $x^2+y^2 = a^2$, gdzie $(a < R)$,
   (g) części powierzchni $x^2+y^2+z^2 = R^2$ wyciętej walcem $x^2+y^2 = Rx$.
7. Znaleźć pole powierzchni całkowitej bryły ograniczonej sferą $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ i paraboloidą $x^2 + y^2 = 2az$ $(a > 0)$.
8. Obliczyć masę następujących figur płaskich:
   (a) trójkąta o wierzchołkach w punktach $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$ wiedząc, że gęstość w punkcie (x, y) jest równa xy,
   (b) figury danej jako $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq \sqrt{3}|x|$ wiedząc, że gęstość w punkcie (x, y) jest równa odległości tego punktu od osi x,
   (c) figury ograniczonej krzywymi $y = x^3$, $y = x^2$ wiedząc, że gęstość w punkcie (x, y) jest równa x^2y.
9. (*) Znaleźć momenty statyczne i momenty bezwładności:

(a) półkola (o gęstości ρ równej kwadratowi odległości danego punktu od środka półkola) o promieniu R, względem osi leżącej w płaszczyźnie półokręgu, równoległej do średnicy i oddalonej od niej o d jednostek długości,

(b) figury jednorodnej ograniczonej krzywymi o równaniach $y = x^2$ i $y = 1$, względem prostej $x + y = 1$,

(c) trójkąta jednorodnego ograniczonego prostymi $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $x = 0$, $y = 0$ $(a, b > 0)$, względem osi układu.

10. Znaleźć współrzędne środków ciężkości figur ograniczonych krzywymi o równaniach, i o danych gęstościach punktowych:

    (a) $x + y = a,\ x = 0,\ y = 0,\ \rho(x, y) = y,$

    (b) $y = \ln x,\ y = 0, x = e,\ \rho(x, y) = \frac{1}{x}$

    (c) $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi,\ \rho(x, y) = 1$

    (d) $y = x^2,\ y = \sqrt{x},\ \rho(x, y) = 1.$

11. Niech D będzie obszarem ograniczonym cosinusoidą o równaniu $y = \cos x$, gdzie $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, oraz osiami współrzędnych, leżącym w I ćwiartce układu współrzędnych. Obliczyć pole tego obszaru, współrzędne środka ciężkości oraz objętości, jakie powstają po obrocie tego obszaru wokół osi OX i OY (zastosować regułę Guldina). Która z tych brył ma większą objętość?

12. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu trójkąta równobocznego o boku a wokół osi równoległej do podstawy i położonej od niej w odległości b. Wykorzystać regułę Guldina.

13. Wykorzystując I regułę Guldina znaleźć położenia środków masy podanych figur jednorodnych:

    (a) półkola o promieniu R,

    (b) trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b.