Zestaw 3 - całki krzywoliniowe nieskierowane

1. Obliczyć całki krzywoliniowe nieskierowane wzdłuż łuku L:
   (a) $\int\limits_L (x+y)dl$, gdzie L jest obwodem trójkąta o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$,
   (b) $\int\limits_L (x^2+y^2)dl$, gdzie L to krzywa o równaniu $x(t)=a(\cos t+t\sin t)$, $y(t)=a(\sin t - t\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$,
   (c) $\int\limits_L x^2y dl$, gdzie L jest częścią okręgu leżącą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych,
   (d) $\int\limits_L x^2y dl$, gdzie L jest częścią elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ leżącą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych,
   (e) $\int\limits_L x^2y dl$, gdzie L jest częścią elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ leżącą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych,
   (f) $\int\limits_L x^2 dl$, gdzie L jest górną częścią okręgu $x^2+y^2=a^2$ zawartą między punktami $A=(a,0)$ i $B=(-a,0)$,
   (g) $\int\limits_L xy dl$, gdzie L jest obwodem kwadratu $|x|+|y|=a$, $(a>0)$,
   (h) $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, gdzie L jest odcinkiem łączącym punkty $A(0,0)$ i $B(1,2)$,
   (i) $\int\limits_L (y-x)dl$, gdzie L jest łukiem krzywej $y=x^3$ zawartym między punktami $A(1,1)$ i $B(2,8)$.

2. Obliczyć całkę krzywoliniową nieskierowaną $\int\limits_L (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y})dl$ wziętą od punktu $E=(-1,0)$ do punktu $H=(0,1)$:
   (a) po prostej EH,
   (b) po łuku asteroidy $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$.

3. Dane są punkty : $A=(3,-6,0)$ i $B=(-2,4,5)$. Obliczyć całkę krzywoliniową nieskierowaną $\int\limits_C xy^2dx+yz^2dy-zx^2dz$, gdy krzywą całkowania C jest:
   (a) odcinek OB, gdzie O jest początkiem układu współrzędnych,
   (b) łuk okręgu AB dany równaniami $x^2+y^2+z^2=45$, $2x+y=0$.

4. Wyznaczyć długość oraz masę krzywej $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ dla $0\le t\le 2\pi$, jeżeli gęstość tej krzywej wyraża się funkcją $\rho(x,y)=|y|$.

5. Znaleźć długość oraz masę łuku krzywej:

(a) $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,\ z = e^t$ dla $0 \leq t \leq 1$, jeśli gęstość łuku wyraża się funkcją $\rho(x, y, z) = e^t$,

(b) $x = at,\ y = \frac{1}{2}at^2,\ z = \frac{1}{3}at^3$ dla $0 \leq t \leq 1$, jeśli gęstość łuku wyraża się funkcją $\rho(x, y, z) = \sqrt{\frac{2y}{a}}$.

6. Znaleźć momenty statyczne:

(a) łuku krzywej o równaniu $y = \sqrt{x}$, gdzie $x \in < 1, 4 >$, względem osi OX,

(b) łuku krzywej o równaniu $y = x^2$, gdzie $x \in < 0, 1 >$, względem osi OY.

7. Znaleźć współrzędne środka ciężkości łuku krzywej określonej równaniami $x(t) = a(t - \sin t),\ y(t) = a(1 - \cos t)$, gdzie $t \in < 0, 2\pi >$.

8. Korzystając z II reguły Guldina obliczyć pole

(a) powierzchni powstałej z obrotu okregu o promieniu r wokół prostej leżącej w płaszczyznie okregu, jezeli odległość środka koła od osi obrotu wynosi R (gdzie $R > r$),

(b) powierzchni powstałej z obrotu dookoła osi OX krzywej o równaniu $y^2 = 4x$, dla $x \in [0, 3]$,

(c) powierzchni powstałej z obrotu dookoła osi OX krzywej zadanej jako $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ t \in [0, 2\pi]$, gdzie a jest pewną stałą dodatnią.

9. Wykorzystując II regułę Guldina, znaleźć położenie środka ciężkości podanych krzywych jednorodnych:

(a) brzeg ćwiartki koła o promieniu R,

(b) brzeg trójkąta równoramiennego o podstawie a i wysokości h.