Zestaw 4 - całki krzywoliniowe skierowane, twierdzenie Greena

1. Obliczyć całki krzywoliniowe skierowane wzdłuż łuku L:
   (a) $\int_L (x^2 + 2xy)dx + y^2 dy$, gdzie L to odcinek od punktu $(0,0)$ do punktu $(2,2)$,
   (b) $\int_L (x^2 + 2xy)dx + (y^2 - xy)dy$, gdzie L to łamana ABC(A= $(0,0)$, B= $(1,0)$, C=$(2,2)$),
   (c) $\int_L ydx + (x+y)dy$, gdzie L to łuk cykloidy o równaniu $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ od punktu $(0,0)$ do punktu $(2a\pi, 0)$,
   (d) $\int_L x^2 dx + ydy$, gdzie L jest częścią okręgu zawartą w pierwszej ćwiartce między punktami $(0,R)$ i $(R,0)$,
   (e) $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, gdzie L jest górną połową elipsy $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara,
   (f) $\int_L x^2 dx + ydy$, gdzie L jest łukiem paraboli $y^2 = x$ od punktu $A(1,1)$ do $B(4,2)$.

2. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną $\int_L (xy-1)dx + x^2 ydy$ po następujących liniach łączących punkt $A = (1,0)$ i $B = (0,2)$:
   (a) po prostej $2x + y = 2$,
   (b) po łuku paraboli $4x + y^2 = 4$,
   (c) po łuku elipsy $x = \cos t$, $y = 2\sin t$.

3. Sprawdzić, że wartość danych całek krzywoliniowych skierowanych nie zależy od drogi całkowania. Obliczyć je:
   (a) $\int_{(-1,1)}^{(1,2)} xy^2 dx + x^2 ydy$,
   (b) $\int_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}^{(\pi,\pi)} \sin x \cos ydx + \cos x \sin ydy$,
   (c) $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} (x^2 - 2yz)dx + (y^2 - 2xz)dy + (z^2 - 2xy)dz$.

4. Obliczyć całki krzywoliniowe skierowane:
   (a) $\oint_{-L} 2xdx - (x+2y)dy$,
   (b) $\oint_L y\cos xdx + \sin xdy$

   po obwodzie trójkąta o wierzchołkach $A = (-1,0)$, $B = (0,2)$ i $C = (2,0)$.

5. Obliczyć całki krzywoliniowe skierowane korzystając z tw. Greena:
   (a) $\oint (y - x^2)dx + (x + y^2)dy$ po brzegu obszaru $x^2 + y^2 \leq R^2$, $x \geq 0, y \geq 0$ zorientowanym dodatnio,
   (b) $\oint (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy$ po brzegu okręgu $x^2 + y^2 = R^2$ zorientowanym dodatnio,
   (c) $\oint -yx^2dx + xy^2dy$ po brzegu obszaru $x^2 + y^2 \leq 1$, zorientowanym dodatnio,
   (d) $\int\limits_L (e^x + e^y - y)dx + xe^y dy$, gdzie L jest wykresem funkcji $y = \sin x$, dla $x \in [0, \pi]$,
   (e) $\int\limits_L (e^x \sin y)dx + (e^x \cos y)dy$, gdzie L jest wykresem funkcji $y = -x^2 + 1$, pomiędzy punktami $(-1, 0)$ a $(1, 0)$.

6. Wykazać, że jeżeli D jest obszarem normalnym względem obu osi współrzędnych, L krzywą gładką będąca brzegiem obszaru D i zorientowaną dodatnio, to pole $|D|$ obszaru D można wyrazić każdym z trzech wzorów

$$|D| = \frac{1}{2} \oint\limits_L xdy - ydx = \oint\limits_L xdy = -\oint\limits_L ydy.$$

   Zastosować pierwszy wzór dla obliczenia pola obszaru ograniczonego elipsą.