Zestaw 6 - całki powierzchniowe zorientowane

1. Obliczyć całkę powierzchniową zorientowaną (po danym płacie powierzchni):

   (a) $\iint\limits_S xdydz + ydxdz - zdxdy$, gdzie S jest górną stroną powierzchni $z = 1 - x^2 - y^2$ leżącą nad płaszczyzną XOY,

   (b) $\iint\limits_\sigma x^3dydz + xyzdxdz + \sqrt[4]{x^2+y^2}dxdy$, gdzie σ jest dolną stroną koła $x^2 + y^2 \leq 4$ (zwróconą w ujemnym kierunku osi OZ),

   (c) $\iint\limits_\sigma (y^2 + z^2)dydz$, gdzie σ jest górną stroną powierzchni $x = 1 - \sqrt{y^2+z^2}$ (patrząc w kierunku osi OX), odciętą płaszczyzną YOZ,

   (d) $\iint\limits_S -2dydz + 3dxdz + 6zdxdy$, gdzie S jest dolną stroną trójkąta o wierzchołkach $A = (-2, 0, 0)$, $B = (0, -3, 0)$ i $C = (0, 0, 1)$,

   (e) $\iint\limits_D 2dxdy + ydxdz - x^2zdydz$, gdzie D jest zewnętrzną stroną części elipsoidy $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$, znajdującej się w pierwszej ósemce przestrzeni,

   (f) $\iint\limits_{-W} ydxdz$, gdzie W jest zewnętrzną powierzchnią czworościanu ograniczonego płaszczyznami $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ i $z = 0$,

   (g) $\iint\limits_S (x^2 + y^2)dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną górnej połowy sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,

   (h) $\iint\limits_\sigma 4x^3dydz + 4y^3dxdz - 6z^4dxdy$, gdzie σ jest powierzchnią boczną walca $x^2 + y^2 = 4$ (zorientowaną na zewnątrz walca), ograniczonego płaszczyznami $z = 0$ i $z = 1$,

   (i) $\iint\limits_S (\sin z + xy^2)dydz + (\cos z + yx^2)dzdx + (xy + z^2)dxdy$, gdzie S jest częścią paraboloidy $z = x^2 + y^2 - 1$ zawartej w dolnej półprzestrzeni ($z \leq 0$), zorientowanej "w dół",

   (j) $\iint\limits_{+\sigma} (z + 1)dxdy$, gdzie σ jest wycinkiem zorientowanego dodatnio brzegu bryły o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, leżącym w półprzestrzeni $z \geq 0$,

   (k) $\iint\limits_S (x^2 + xz)dydz + -yzdxdz + ydxdy$, gdzie S jest zorientowaną dodatnio powierzchnią ograniczoną przez $z = 6 - x^2 - y^2$ i $z = 2$,

   (l) $\iint\limits_{-\sigma} z^2dxdy$, gdzie σ jest zorientowaną dodatnio elipsoidą o równaniu $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$.

2. Korzystając ze wzoru Stokesa obliczyć nastepujące całki krzywoliniowe:

   (a) $\oint\limits_{-L} (2x + y)dx - 2ydy + xyz^2dz$, gdzie L jest obwodem trójkąta o wierzchołkach $A = (0, -1, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ i $C = (2, 0, 0)$, zorientowanym w kierunku $ABCA$,

(b) $\oint\limits_{l} e^x dx + z(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dy + yz^3 dz$, gdzie l jest zamkniętą linią przecięcia powierzchni $z = \sqrt{x^2+y^2}$ z płaszczyznami $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ i $y = 1$, zorientowaną w kierunku $ABCDA$, gdzie $A = (0,0,0)$, $B = (2,0,0)$, $C = (2,1,0)$, $D = (0,1,0)$, są rzutami odpowiednich punktów należących do krzywej l na płaszczyzną XOY,

(c) $\oint\limits_{K} (x-y+3z)dx + (y-3x+z)dy + (x-3y+z)dz$, gdzie K jest dodatnio zorientowaną (patrząc "‘z góry"’ osi OZ) krawędzią przecięcia płaszczyzny $2x+3y+6z = 3$ z płaszyznami układu współrzędnych,

(d) $\oint\limits_{K} (x^2+z)dx + (x+z^2+e^{\cos y^3})dy + \arctan(\sqrt[3]{z-5})dz$, gdzie K brzeg trójkąta zorientowanego w następującej kolejności wierzchołków $A = (2,0,0)$, $B = (0,2,0)$ i $C = (0,0,2)$.

3. Korzystając ze wzoru Gaussa-Ostrogradskiego obliczyć nastepujące całki powierzchniowe:

(a) $\iint\limits_{-\sigma} zdxdy + ydxdz + xdydz$, gdzie σ jest zorientowaną dodatnio powierzchnią sześcianu ograniczonego płaszczyznami $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ i $z = 1$,

(b) $\iint\limits_{+S} x\arctan(y^2-x)dxdy + xyzdxdz + 2x\arccos y dydz$, gdzie S jest zorientowaną dodatnio powierzchnią kostki o wierzchołkach $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ i $(1,1,1)$,

(c) $\iint\limits_{S} (y^2z+x)dydz - x^2ydxdz + (z^2+4xy)dxdy$, gdzie S jest wewnętrzną stroną prostopadłościanu ograniczonego płaszyznami układu współrzędnych i płaszczyznami o równaniach: $x = 3$, $y = 4$ i $z = 1$,

(d) $\iint\limits_{S} (2xy+z^2)dydz + (xz-y^2)dxdz + (6z-2xy)dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni $x^2+y^2+z^2 = R^2$,

(e) $\iint\limits_{S} xdydz + 4ydxdz + zdxdy$, gdzie S jest wewnętrzną stroną brzegu bryły ograniczonej powierzchniami $z = x^2+y^2$, $z = 1$,

(f) $\iint\limits_{S} (z^2+y^2)dydz + xzdxdz + (y^2-x^2)dxdy$, gdzie S jest górną stroną części powierzchni $z = x^2+y^2-4$ leżącej poniżej płaszczyzny OXY,

(g) $\iint\limits_{+S} x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, gdzie S jest dodatnio zorientowanym brzegiem bryły ograniczonej powierzchnią $z = \frac{1}{4} - x^2 - y^2$ i leżącej w pierwszej ósemce przestrzeni,

(h) $\iint\limits_{\sigma} yzdzdx$, gdzie σ jest zewnętrzną stroną brzegu bryły danej jako $z \geq 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, $y \geq 0$.