Zestaw 0 - wprowadzenie

1. Zmienna losowa X ma gęstość prawdopodobieństwa

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{dla } x > 0 \\ 0, & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}.$$

Znaleźć dystrybuantę, wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X.

2. Wyznaczyć rozkład ilorazu dwóch niezależnych zmiennych losowych o standardowych rozkładach normalnych.

3. Zmienna losowa Y ma rozkład jednostajny na przedziale $[0,1]$ i jest związana ze zmienną losową Y zależnością

$$\tan(\frac{\pi Y}{2}) = e^X.$$

Znaleźć gęstość rozkładu zmiennej Y wiedząc, że $\mathbb{P}(Y \in (-1,1)) = 1$.

4. Wektor losowy (X,Y) ma gęstość prawdopodobieństwa

$$f(x,y) = \begin{cases} Cx(3-x-y) & \text{dla } (x,y) \in [0,1]^2 \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}.$$

Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej losowej $Z = \max(X,Y)$ orz stałą C.

5. Niech zmienna losowa X ma rozkład $N(\frac{3}{2}, 2)$. Obliczyć prawdopodobieństwo $\mathbb{P}(\frac{1}{2} < X < 2)$ i $\mathbb{P}(|2X-1| < 1)$ z dokładnością do trzeciego miejsca po przecinku.

6. Niech $\Omega = \{1,2,\ldots,10\}$. Znaleźć $\sigma(\{1,2,3\},\{3,4,5\},\{4,6\})$.

7. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie $\Omega = [-1,1]$, $\mathcal{F}$ -σ-ciało zbiorów borelowskich, $\mathbb{P}$ - miara Lebesgue'a. Zdefiniujmy funkcję $X : \Omega \to [0,1]$ wzorem

$$X(\omega) = \omega^2.$$

Wykazać, że X jest zmienną losową na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, oraz znaleźć σ-ciało generowane przez tę zmienną.

8. Klient wpłacił do banku 10000 PLN. Po dwóch latach wypłacił wszystkie zgromadzone na koncie środki w kwocie 10953 PLN. Ile wynosiła nominalna stopa procentowa jeżeli odsetki były kapitalizowane półrocznie.

9. Dany jest następujący model dwumianowy:

$$A(0) = 100,\ A(1) = 105,\ S(0) = 100,\ U = 30\%,\ D = -10\%.$$

Wyznaczyć prawdopodobieństwa martyngałowe oraz bezarbitrażową cenę europejskiej opcji call z ceną wykonania 110.