Zestaw 3

1. Wiadomo, że moment bankructwa τ ma rozkład ciągły z gęstością wyrażającą się wzorem

$$f(x) = \frac{x}{\lambda^2} e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}, \text{ dla } x > 0,$$

gdzie $\lambda > 0$.

(a) Znaleźć dystrybuantę F rozkładu τ.
(b) Uzasadnić, że $F(t) < 1$ dla wszystkich $t > 0$.
(c) Uzasadnić, że $F(t)$ jest ściśle rosnąca.
(d) Uzasadnić, że $F(t)$ jest funkcją ciągłą.
(e) Znaleźć prawdopodobieństwo przeżycia do czasu t.
(f) Wyznaczyć funkcję hazardu.
(g) Wyznaczyć stopę hazardu (o ile istnieje).

2. Na przestrzeni probabilistycznej $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ zdefiniować zmienną losową τ, której dystrybuanta będzie wyrażać się wzorem

$$F(x) = \frac{4}{\pi} \arctan e^x - 1, \text{ dla } x > 0.$$

Następnie znaleźć $\sigma(\tau)$.

3. Na przestrzeni 20 lat wśród 10 podobnych firm, 2 zbankrutowały w piątym roku, a trzy w roku dwunastym. Załóżmy, że moment bankructwa każdej z firm jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z tym samym parametrem λ, oraz, że zmienne te są niezależne.

(a) Oszacować λ.
(b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że dana firma nie zbankrutuje przed upływem 5 lat?
(c) Wyznaczyć oczekiwany czas bankructwa.

4. (*) [1] Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dany jest ciąg $\{X_n\}$ niezależnych zmiennych losowych o następującym rozkładzie:

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{2}.$$

Zdefiniujmy zmienną losowa τ jako

$$\tau = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X_n}{3^n}.$$

(a) Uzasadnić, że dystrybuanta $F(t)$ rozkładu τ jest na przedziale $[0, \frac{3}{2}]$ ściśle rosnącą funkcją ciągłą (Wskazówka: wykazać, że dla dowolnego t z tego przedziału $P(\tau = t) = 0$).
(b) Wykazać, że nie istnieje gęstość rozkładu τ.

[1] Zadanie dla chętnych, na 3 plusy. Proszę przynieść rozwiązania na osobnych kartkach.