Zestaw 4

1. Dla ustalonego t wyznaczyć wszystkie zdarzenia będące elementami sigma-ciała generowanego przez indykator bankructwa $I(t)$ (tj. $\sigma(I(t))$).

2. Wykazać, że $(\mathcal{I}_t)_{t\geq 0}$ jest najmniejszą filtracją względem której τ jest momentem stopu.

3. Ustalmy $t \geq 0$. Zdefiniujmy następujące zbiory:

$$\mathcal{D}_1 = \{A \cap \{\tau \leq t\} : A \in \sigma(\tau)\},$$
$$\mathcal{D}_2 = \{B \cup \{t < \tau\} : B \in \sigma(\tau)\}.$$

   oraz

$$\mathcal{D} = \{C \in \sigma(\tau) : C \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{I}_t\}.$$

   (a) Wykazać, że $\mathcal{D}_1$ oraz $\mathcal{D}_2$ są zamknięte na przeliczalne sumy zbiorów.

   (b) Wykazać, że $\mathcal{D}$ jest zamknięty na przeliczalne sumy zbiorów.

4. Wykazać, że dla dowolnego $t \geq 0$ zachodzi równość

$$\mathcal{I}_t = \sigma(\{t < \tau\}, \sigma(\tau \wedge t)).$$

5. Niech $\mathcal{I}_\infty = \sigma(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{I}_t)$. Wykazać, że $\mathcal{I}_\infty = \sigma(\tau)$.

6. Załóżmy, że τ jest zmienną losową o rozkładzie ciągłym na $(0, +\infty)$. Wykazać, że dla dowolnego $t \geq 0$ zmienna losowa τ nie jest $\mathcal{I}_t$ mierzalna.

Anna Wasieczko-Zając