Zestaw 5

1. Niech X będzie całkowalną zmienną losową. Wykazać, że dla dowolnego $t \geq 0$ zachodzi równość
$$\mathbb{E}_P(X\mathbb{1}_{\{t<\tau\}}|\mathcal{I}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}e^{\Gamma(t)}\mathbb{E}_P(X\mathbb{1}_{\{t<\tau\}})$$

2. Niech τ ma rozkład ciągły na przedziale $(0, +\infty)$ ze stopą hazardu
$$\gamma(t) = \frac{1}{t+1}.$$
Wyznaczyć $\mathbb{E}(\frac{1}{\tau^2}|\mathcal{I}_t)$.

3. Niech σ będzie momentem stopu względem pewnej filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Wykazać, że dla dowolnego $t \geq 0$ zmienna losowa $\sigma \wedge t$ jest $\mathcal{F}_t$ mierzalna.

4. Niech σ będzie momentem stopu względem filtracji $(\mathcal{I}_t)_{t\geq 0}$, spełniającym $0 \leq \sigma \leq T$. Wykazać, że istnieje deterministyczna stała $c \in [0, T]$, dla której $\sigma \geq \tau \wedge c$ oraz $\sigma = c$ na zbiorze $\{c < \tau\}$.

5. Niech σ będzie momentem stopu względem filtracji $(\mathcal{I}_t)_{t\geq 0}$, spełniającym $0 \leq \sigma \leq T$. Wykazać, że istnieje deterministyczna stała $c \in [0, T]$, dla której $\{\sigma < \tau\} = \{c < \tau\}$ oraz $\{c < \tau\}$ jest atomem σ-ciała $\mathcal{I}_\sigma$, gdzie
$$\mathcal{I}_\sigma = \{A \subset \Omega : \forall t \leq 0 : A \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{I}_t\}.$$

6. Niech $\sigma = (\tau^3 + \tau^2 + \tau) \wedge T$. Wykazać, że σ jest momentem stopu względem filtracji $(\mathcal{I}_t)_{t\geq 0}$, spełniającym $0 \leq \sigma \leq T$ oraz wyznaczyć stałą c z poprzedniego zadania.

7. Wprowadźmy następującą uogólnioną definicję prostej strategii:

   Definicja 1. *Strategię $\phi = (\phi_B, \phi_D)$ nazwiemy* prostą *jeżeli istnieje ciąg momentów stopu $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_n = T$ względem filtracji $(\mathcal{I}_t)_{t\geq 0}$ dla którego spełnione są następujące warunki*

   (a) Procesy $\phi_B(t), \phi_D(t)$ są stałe na $(\sigma_{k-1}, \sigma_k]$ dla każdego $k = 1, \ldots, n$.

   (b) Zmienne losowe $\phi_B(\sigma_k), \phi_D(\sigma_k)$ są $\mathcal{I}_{\sigma_{k-1}}$-mierzalne dla każdego $k = 1, \ldots, n$ oraz $\phi_B(0), \phi_D(0)$ są $\mathcal{I}_0$-mierzalne.

   Ponadto powiemy, że taka strategia jest samfinansującą*, gdy*
$$V_\phi(\sigma_k) = \phi_B(\sigma_{k+1})B(\sigma_k, T) + \phi_D(\sigma_{k+1})D(\sigma_k, T),$$
   dla każdego $k = 0, \ldots, n-1$.

   Udowodnić, że jeżeli
$$D(t, T) = e^{-r(T-t)-g(t)}\mathbb{1}_{t<\tau},$$
   dla pewnej dodatniej, ściśle malejącej, prawostronnie ciągłej funkcji $g : [0, T] \to \mathbb{R}$ spełniającej $g(T) = 0$, to model nie dopuszcza prostego arbitrażu.

Anna Wasieczko-Zając