Zestaw 6

1. Niech proces $D(t,T)$ będzie dany wzorem

$$D(t,T) = \begin{cases} e^{-(r+\lambda)(T-t)} & \text{dla } t < \tau \\ 0, & \text{dla } t \geq \tau \end{cases}.,$$

gdzie $\lambda > 0$.

   (a) Uzasadnić, że model nie dopuszcza prostego arbitrażu.
   (b) Wyznaczyć $\mathbb{Q}(T < \tau)$ oraz $\mathbb{Q}(\tau \leq t)$ dla wszystkich $t \in [0,T]$.
   (c) Niech $\sigma = \tau \wedge T$. Uzasadnić, że σ jest $\mathcal{I}_T$ mierzalna. Znaleźć rozkład σ względem miary $\mathbb{Q}$.. Obliczyć $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\sigma)$ oraz $Var_{\mathbb{Q}}(\sigma)$.
   (d) Obliczyć $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{\tau}|\{\tau \leq T\})$.

2. Niech proces $D(t,T)$ będzie dany wzorem

$$D(t,T) = \begin{cases} e^{-r(T-t)+g(t)} & \text{dla } t < \tau \\ 0, & \text{dla } t \geq \tau \end{cases}.,$$

gdzie $g(t) = at^2 + bt + c$, dla wszystkich $t \in [0,T]$.

   (a) Wyznaczyć warunki jakie muszą spełniać wartości parametrów a, b, c, aby w modelu nie występował prosty arbitraż.
   (b) Niech $T = 1$. Wyznaczyć wartości parametrów a, b, c, wiedząc, że w modelu nie występuje prosty arbitraż oraz

$$\mathbb{Q}(T < \tau) = \frac{1}{e}, \ \mathbb{Q}(\tau \leq \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$$

3. Niech $\lambda > 0$ oraz $g(t) = \lambda(T-t)$ dla dowolnego $t \in [0,T]$. Zdefiniujmy zmienną losową $\overline{\tau}$ następująco:

$$\overline{\tau} = \begin{cases} \tau & \text{gdy } \tau \leq T \\ \infty, & \text{gdy } T < \tau. \end{cases}.$$

   (a) Uzasadnić, że $\overline{\tau}$ jest $\mathcal{I}_T$ mierzalne
   (b) Dla tak zdefiniowanego $\overline{\tau}$ wyznaczyć $F_{\mathbb{Q}}, G_{\mathbb{Q}}, \Gamma_{\mathbb{Q}}$.

4. Wykazać, że dla dowolnego $t \in [0,T]$ zachodzi wzór

$$\Gamma_{\mathbb{Q}}(t) = g(0) - g(t),$$

gdzie $\Gamma_{\mathbb{Q}}(t)$ jest funkcją hazardu momentu $\overline{\tau}$ zdefiniowanego w poprzednim zadaniu.