Zestaw 8

1. Niech $N(t)$ będzie procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$. Wykazać, że proces $N(t) - \lambda t$ jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{N}_t$ generowanej przez proces $N(t)$.

2. Niech $N(t)$ będzie procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$ zadanym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Wykazać, że odwzorowanie $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+$ zdefiniowane jako
$$\tau(\omega) = \inf\{t \geq 0 : N(t)(\omega) > 0\},$$
jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ.

3. Niech τ będzie momentem bankructwa z funkcją hazardu Γ i dystrybuantą F. Wykazać, że $\mathbb{E}(I(t)) = \mathbb{E}(\Gamma(t \wedge \tau)) = F(t)$

4. Niech τ będzie momentem bankructwa. Wykazać, że zachodzi równość
$$\int_0^{t\wedge\tau} \frac{1}{1 - F(u)} f(u)du = \int_0^t \frac{1 - I(u)}{1 - F(u)} f(u)du$$
oraz, że powyższy proces jest kompensatorem procesu indykatora bankructwa $I(t)$.

5. Korzystając z faktu, że proces $L(t) = (1 - I(t))e^{\Gamma(t)}$ jest martyngałem, wykazać, że
$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T<\tau\}}|\mathcal{I}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} e^{-\int_t^T \gamma(s)ds}.$$

6. Niech $0 \leq a < b$ i niech Z będzie zmienną losową $\mathcal{I}_a$-mierzalną. Zdefiniujmy proces $X(t) = Z\mathbb{1}_{(a,b]}(t)$ dla $t \geq 0$. Wykazać, że istnieje lewostronnie ciągła deterministyczna funkcja $Y(t)$ spełniająca
$$\int_0^t X(u)dM(u) = \int_0^t Y(u)dM(u).$$
Wywnioskować stąd, że $\int_0^t X(u)dM(u)$ jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{I}_t$.

Anna Wasieczko-Zając