Zestaw 9

1. Niech $H(t) = e^{-rT}D(t,T)$. Oczywiście wiemy, że tak zdefiniowany proces jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{I}_t$. Znaleźć odpowiadające mu funkcje $h(t)$ i $\psi(t)$ z twierdzenia o reprezentacji martyngału, oraz sprawdzić (wykonując odpowiednie obliczenia), że zachodzi równość
$$H(t) = \mathbb{E}(h(\tau)) + \int_0^t (h(s) - \psi(s))dM(s).$$

2. Wykazać, że jeżeli strategia φ jest samofinansująca, to proces $\widetilde{V}_\varphi(t)$ spełnia
$$\widetilde{V}_\varphi(t) = V_\varphi(0) + \int_0^t \phi_D(u)d\widetilde{D}(u,T).$$
Wywnioskować stąd, że $\widetilde{V}_\varphi(t)$ jest martyngałem.

3. Niech $\varphi_D(t) = 1\!\!1_{[0,\tau]}(t)$, a $\varphi_B(t)$ takie, że $V_\varphi(0) = 0$ i ϕ jest samofinansująca. Wykazać, że φ nie jest strategią arbitrażową.

4. Wykazać, że istnienie miary martyngałowej implikuje brak arbitrażu w modelu.

5. Wyznaczyć strategię replikującą dla obligacji korporacyjnej ze stopą odzysku δ, której wypłata w chwili T dana jest jako
$$D_\delta(T,T) = H = 1\!\!1_{\{T<\tau\}} + \delta 1\!\!1_{\{\tau \le T\}}.$$
Korzystając z otrzymanej strategii wyznaczyć cenę tego bonu w chwili t.

6. Dla H z poprzedniego zadania obliczyć $e^{-r(t-t)}\mathbb{E}(H|\mathcal{I}_t)$ wprost, a następnie porównać otrzymany wynik z wynikiem otrzymanym w poprzednim zadaniu.

7. Wykazać, że dowolną obligację z zerową stopą odzysku (tj. D(t,T)) można zreplikować za pomocą $B(t,T)$ i $D_\delta(t,T)$.

8. Wykazać, że cena w chwili 0 obligacji korporacyjnej o wartości nominalnej 1, wypłacającej w chwili bankructwa $\phi(\tau)$ jest równa
$$D_\phi(0,T) = e^{-rT}G(T) + \int_0^T \phi(s)e^{-rs}f(s)ds.$$

9. Wykazać, że $D_\phi(t,T)$ spełnia równanie różniczkowe
$$dD_\phi(t,T) = (rD_\phi(t,T) - \phi(t)\gamma(t)(1 - I(t))dt - \widehat{D}_\phi(t,T)dM(t).$$