

Zestaw 1

1. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną z $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, oraz $\mathbb{P}(\omega_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\omega_2) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(\omega_3) = \frac{2}{6}$. Rozważ ceny akcji:

$$S(0) = 80,$$

$$S(1) = \begin{cases} 70, & i = 1 \\ 90, & i = 2 \\ 100, & i = 3 \end{cases}.$$

- (a) Oblicz stopę zwrotu.
 (b) Oblicz oczekiwaną stopę zwrotu.
 (c) Oblicz wariancję stopy zwrotu oraz odchylenie standardowe.
2. Niech $U, D \in \mathbb{R}$ spełniają $-1 < D < U$. Przypuśćmy, że S ma rozkład dwumianowy, tj.

$$\mathbb{P}(S(1) = S(0)(1+U)^k(1+D)^{N-k}) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k},$$

dla $k \in \{0, 1, \dots, N\}$.

- (a) Oblicz $\mathbb{E}(S(1))$.
 (b) Oblicz $\text{Var}(S(1))$.
 (c) Oblicz oczekiwaną stopę zwrotu.
3. Przypuśćmy, że $S(1) = S(0)e^{m+sZ}$, gdzie Z jest zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym.
- (a) Oblicz $\mathbb{E}(S(1))$.
 (b) Oblicz $\text{Var}(S(1))$.
 (c) Oblicz oczekiwaną stopę zwrotu.
4. (*Egzamin na aktuarusza, Matematyka Finansowa, 2017*) Ceny akcji S_T charakteryzuje rozkład logarytmiczno-normalny, dla którego:

$$\ln S_T \sim \Phi \left[\ln S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T; \sigma \sqrt{T} \right]$$

gdzie:

S -aktualna cena akcji,

μ -oczekiwana stopa zwrotu z akcji,

σ -zmiennosc ceny akcji.

Prawdopodobieństwo, że w ciągu najbliższych trzech miesięcy cena akcji znajdzie się w przedziale od 30 do 45 wynosi 95%, a aktualna cena akcji jest na poziomie 35. Wyznacz oczekiwaną stopę zwrotu z akcji. Podaj najbliższą wartość.

- (a) 18%;
- (b) 19,5%;
- (c) 20%;
- (d) 21,5%;
- (e) 22,5%.

5. (*Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2008*) Oczekiwana stopa zwrotu z akcji XYZ wynosi 20% w skali roku przy odchyleniu standardowym równym 20% rocznie. Jeżeli stopy zwrotu z tej akcji mają rozkład normalny to prawdopodobieństwo zrealizowania zysku nie mniejszego niż 10% z inwestycji w tę akcję w ciągu roku wynosi około

- (a) 60%;
- (b) 70%;
- (c) 80%;
- (d) 90%.

6. Rozważ walor z dzisiejszą ceną akcji $S(0) = 75$ oraz stopą zwrotu

$$K = \begin{cases} -10\%, & \text{z prawdopodobieństwem } \frac{1}{6} \\ 12\%, & \text{z prawdopodobieństwem } \frac{1}{3} \\ 20\%, & \text{z prawdopodobieństwem } \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Oblicz przyszłe ceny akcji.

7. Rozważ walor z następującymi cenami

$$S(1) = \begin{cases} 70, & \text{z prawdopodobieństwem } \frac{1}{4} \\ 80, & \text{z prawdopodobieństwem } \frac{1}{4} \\ 90, & \text{z prawdopodobieństwem } \frac{1}{4} \\ 100, & \text{z prawdopodobieństwem } \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Dla jakiej dzisiejszej ceny akcji oczekiwana stopa zwrotu wyniesie 10%?

8. Rozważ walor z następującymi cenami

$$S(1) = \begin{cases} 60, & \text{z prawdopodobieństwem } \frac{1}{4} \\ 70, & \text{z prawdopodobieństwem } \frac{1}{4} \\ 80, & \text{z prawdopodobieństwem } \frac{1}{4} \\ 100, & \text{z prawdopodobieństwem } \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Dla jakiej dzisiejszej ceny akcji oczekiwane odchylenie standardowe stopy zwrotu wyniesie 15%?

9. Zakładamy, że $S(0) = 80$ oraz, że cena *ex dividend* wyniesie

$$S(1) = \begin{cases} 60, & \text{z prawdopodobieństwem } \frac{1}{3} \\ 80, & \text{z prawdopodobieństwem } \frac{1}{3} \\ 90, & \text{z prawdopodobieństwem } \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Firma wypłaci stałą dywidendę w wysokości D (która jest niezależna od wysokości przyszłych cen akcji). Dla jakiego D oczekiwany zwrot wyniesie 20%?

10. (*Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2010*) Kupiłeś akcje spółki za 60000 zł. Pod koniec roku otrzymałeś 4000 zł dywidendy, a następnie sprzedałeś akcje za 59000 zł. Ile wynosi stopa zwrotu z Twojej inwestycji?
- (a) 5%;
 - (b) 6,7%;
 - (c) 3%;
 - (d) $-1,7\%$.
11. Dany jest rynek, na którym stopa wolna od ryzyka wynosi $R > 0$. W chwili 0 inwestor dokonuje zakupu akcji S . Zakup finansuje z dwóch źródeł: posiadanej przez siebie gotówki (w wysokości $wS(0)$) oraz pożyczki (w wysokości $(1-w)S(0)$, na stopę R). Oznaczmy stopę zwrotu z takiej inwestycji przez K_{lev} , natomiast stopę zwrotu z akcji przez K_S . Przyjmując $w \in (0, 1)$, wykazać, że zachodzi związek

$$K_{\text{lev}} = R + \frac{1}{w}(K_S - R),$$

a następnie wyznaczyć związek pomiędzy σ_S oraz σ_{lev} .

12. (*Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2016*) Inwestor dysponuje własnymi środkami w wysokości 1 mln PLN. Stopa zwrotu z akcji spółki ADAB wynosi 15% rocznie. Stopa zwrotu inwestycji wolnych od ryzyka równa jest 3% rocznie. Na rynku możliwe jest dokonywanie inwestycji w instrumenty wolne od ryzyka przy stopie równej stopie zwrotu z inwestycji w instrumenty wolne od ryzyka. Na rynku możliwa jest krótka sprzedaż. Jaką kwotę inwestor powinien pożyczyć, aby osiągnąć stopę zwrotu z portfela składającego się z akcji spółki ADAB i z instrumentów wolnych od ryzyka o stopie zwrotu równej 20% rocznie. Wskaż najbliższą wartość.
- (a) 0,30 mln PLN;
 - (b) 0,42 mln PLN;
 - (c) 0,70 mln PLN;
 - (d) 1,42 mln PLN.
13. (*Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2016*) X i Y są dwiema zmiennymi losowymi reprezentującymi wartości rocznych stóp zwrotu z dwóch różnych portfeli. Jeżeli wartości średnie X i Y wynoszą odpowiednio: $E(X) = 2$, $E(Y) = -5$, a współczynnik korelacji X i Y wynosi 0, to wartość średnia iloczynu zmiennych X i Y wynosi

- (a) $\sqrt{10}$;
- (b) 10;
- (c) -10 ;
- (d) wartość bezwzględna wynosi 10, ale nie można określić znaku.