

Zestaw 2

1. Niech X, Y będą zmiennymi losowymi o skończonych wariancjach. Wykazać, że $\sigma_{X+Y} \leq \sigma_X + \sigma_Y$.
2. (*Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2017*) X i Y są dwiema zmiennymi losowymi reprezentującymi wartości rocznych stóp zwrotu z dwóch różnych portfeli. Jeżeli wartości średnie X, Y wynoszą odpowiednio $\mathbb{E}(X) = 3$, $\mathbb{E}(Y) = 4$, a wartości kowariancji X i Y $\text{Cov}(X, Y) = 1$, to jaka jest wartość oczekiwana iloczynu obu zmiennych losowych?
 - (a) -1;
 - (b) 0;
 - (c) 13;
 - (d) 12.
3. Wiemy, że współczynnik korelacji wynosi $\rho = 0.5$ oraz, że wariancje dla stóp zwrotów z walorów wynoszą $\text{Var}(K_1) = 0.01$ oraz $\text{Var}(K_2) = 0.04$. Oblicz $\text{Cov}(K_1, K_2)$.
4. (*Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2008*) Proszę obliczyć współczynnik korelacji występujący pomiędzy stopami zwrotu akcji A i B mając do dyspozycji następujące dane (w procentach):

	Akcja A	Akcja B
Styczeń	-5	3
Luty	10	8
Marzec	-4	-8
Kwiecień	3	0
Maj	15	7
Czerwiec	2	12
Lipiec	0	4
Sierpień	-7	9
Wrzesień	-4	-8
Październik	-9	-6
Listopad	12	0
Grudzień	3	1

- (a) 0,533;
 - (b) 0,433;
 - (c) 0,393;
 - (d) 0,323.
5. Rozważ dwa walory z parametrami $\mu_1 = 10\%$, $\sigma_1 = 20\%$, $\mu_2 = 12\%$, $\sigma_2 = 30\%$ oraz $\rho = -0.4$. Oblicz oczekiwany zwrot oraz odchylenie standardowe dla portfela $\mathbf{w} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

6. (*Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2017*) Na rynku dostępne są akcje spółek P oraz Q . Odchylenia standardowe stóp zwrotu w te akcje wynoszą odpowiednio 0,05 oraz 0,06. Współczynnik korelacji obu stóp zwrotu jest równy 0. Inwestor posiada portfel o wartości 1 mln PLN, założony wyłącznie z akcji P . Jak zmieni się ryzyko portfela inwestora, mierzone odchyleniem standardowym stopy zwrotu, jeżeli sprzeda połowę posiadanych akcji spółki P i za otrzymaną kwotę zakupi akcje spółki Q . Wskaż najbliższą liczbę.
- (a) zmaleje o 21,9%;
 - (b) zmaleje o 3,9%;
 - (c) wzrośnie o 2,4%;
 - (d) wzrośnie o 5,7%.
7. Mamy do dyspozycji dwa walory z parametrami $\mu_1 = 20\%$, $\sigma_1 = 10\%$, $\mu_2 = 10\%$, $\sigma_2 = 6\%$ oraz $\rho = -1$. Tworzymy portfel $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ składający się z tych dwóch walorów, którego ryzyko mierzone odchyleniem standardowym wynosi 0. Wyznacz wagi w_1, w_2 , oraz oczekiwaną stopę zwrotu z takiego portfela.
8. Rozważ dwa walory z parametrami $\sigma_1 = 20\%$, $\sigma_2 = 40\%$. Ile wynosi współczynnik korelacji pomiędzy zwrotami dla walorów, jeżeli dla portfela $\mathbf{w} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ mamy $\sigma_{\mathbf{w}} = \sqrt{0.03}$.
9. Niech $\sigma_1 = 20\%$, $\sigma_2 = 40\%$ oraz $\sigma_{12} = 40\%$. Dla jakiego portfela $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ dostaniemy $\sigma_{\mathbf{w}} = \frac{1}{2}\sqrt{19}$.
10. Rozważmy dwa walory z parametrami $\mu_1 = 12\%$, $\sigma_1 = 20\%$, $\mu_2 = 15\%$, $\sigma_2 = 40\%$ oraz $\sigma_{12} = -0.02$. Dla jakiego portfela $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ dostaniemy $\mu_{\mathbf{w}} = 13\%$? Ile wyniesie odchylenie standardowe dla takiego portfela?
11. Rozważmy dwa walory z parametrami $\mu_1 = 9\%$, $\mu_2 = 15\%$. Czy za pomocą tych walorów można uzyskać portfel o oczekiwanej stopie zwrotu $\mu_{\mathbf{w}} = 30\%$? Jeżeli tak, to czy zawsze jest to wykonalne?
12. Rozważmy dwa walory z parametrami $\mu_1 = 10\%$, $\sigma_1 = 10\%$, $\mu_2 = 20\%$, $\sigma_2 = 30\%$ oraz $\rho_{12} = 0.7$. Wyznacz portfel \mathbf{w} , dla którego zachodzi $\sigma_{\mathbf{w}} < \sigma_1$. Czy możliwe jest skonstrowanie portfela z oczekiwaną stopą zwrotu równą 30%?
13. Możemy zainwestować w walor o oczekiwanym zwrocie $\mu = 15\%$ i wariancji $\text{Var}(K) = 0.16$. Dodatkowo mamy do dyspozycji inwestycję w walor wolny od ryzyka o stopie $r = 3\%$. Jaka inwestycja da nam oczekiwany zwrot $\mu_{\mathbf{w}} = 9\%$? Jakie będzie odchylenie standardowe stopu zwrotu z takiego portfela?
14. (*Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2017*) Stopa zwrotu z akcji spółki Gasur wynosi 12% rocznie, a jej odchylenie standardowe jest

równe 0,2. Stopa zwrotu z inwestycji wolnych od ryzyka równa jest 5% rocznie. Na rynku możliwe jest dokonywanie inwestycji w instrumenty wolne od ryzyka oraz zaciąganie pożyczek przy stopie równej stopie zwrotu z inwestycji w instrumenty wolne od ryzyka. Na rynku możliwa jest krótka sprzedaż. Wyznacz odchylenie standardowe stopy zwrotu z portfela składającego się z akcji spółki Gasur i z instrumentów wolnych od ryzyka, dla którego stopa zwrotu wyniesie 15% rocznie. Wskaż najbliższą wartość.

- (a) 0,08;
- (b) 0,35;
- (c) 0,29;
- (d) 0,55.

15. Możemy zainwestować w walor o oczekiwanym zwrocie $\mu = 12\%$. Dodatkowo mamy do dyspozycji inwestycję (bez możliwości przyjęcia w niej krótkiej pozycji) w walor wolny od ryzyka o stopie $r_1 = 4\%$. Ponadto możemy wziąć pożyczkę według stopy $r_2 = 8\%$.

- (a) Jaka inwestycja da nam oczekiwany zwrot $\mu_w = 8\%$, a jaka $\mu_w = 20\%$?
- (b) Przypuśćmy, że chcemy zainwestować 30000 PLN. Jak podzielić naszą inwestycję, aby uzyskać oczekiwany zwrot 8%, a jak, żeby uzyskać 20%?

16. (*Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2016*) Stopa zwrotu z aktywów wolnych od ryzyka wynosi 6% rocznie. Oczekiwana stopa zwrotu z akcji spółki Delta równa jest 18% rocznie i odchylenie standardowe stopy zwrotu wynosi 0,50. Inwestor chciałby osiągnąć stopę zwrotu w wysokości 24% rocznie budując portfel inwestycyjny składający się z akcji spółki Delta i z aktywów wolnych od ryzyka. Inwestor może zaciągać pożyczki przy koszcie kapitału w wysokości równej stopie zwrotu z aktywów wolnych od ryzyka. Oblicz odchylenie standardowe stopy zwrotu z portfela, który zapewnia realizację zakładanej stopy zwrotu. Wskaż najbliższą liczbę.

- (a) 0,56;
- (b) 0,75;
- (c) 0,85;
- (d) 0,95.

17. Przypuśćmy, że dysponujemy trzema walorami. Pierwsze dwa mają następujące parametry

$$\mu_1 = 10\%, \sigma_1 = 25\%, \mu_2 = 15\%, \sigma_2 = 30\%,$$

natomiast o trzecim z nich wiadomo, że

$$\mathbb{E}(S_3(1)) = 100, \sqrt{\text{Var}(S_3(1))} = 20.$$

Jakie warunki musi spełniać cena $S_3(0)$, aby spełniony był warunek:

- (a) Trzeci walor dominuje pierwszy walor.
 - (b) Trzeci walor dominuje drugi walor.
 - (c) Żaden z walorów nie jest dominowany przez inny walor.
18. Niech $\mu_1 = 12\%$, $\mu_2 = 15\%$, $\sigma_1 = 0.4$, $\sigma_2 = 0.2$ oraz $\rho = 0.5$. Czy (zgodnie z teorią Markowitza) opłaca się zainwestować w portfel $\mathbf{w} = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$?
19. (*Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2008*) Oczekiwana stopa zwrotu z akcji spółki A wynosi 10%, zaś odchylenie standardowe stopy zwrotu 16%. Z kolei oczekiwana stopa zwrotu z akcji spółki B wynosi 8%, a odchylenie standardowe stopy zwrotu 12%. Współczynnik korelacji pomiędzy stopami zwrotu z tych akcji wynosi -1 . Zakładając, że na rynku kapitałowym istnieją jedynie wymienione akcje określ, który z wymienionych portfeli złożonych z tych akcji będzie portfelem efektywnym:
- I: 65% A i 35% B ;
 - II 55% A i 45% B ;
 - III 45% A i 55% B ;
 - IV 35% A i 65% B ;
- (a) (IV);
 - (b) (I,II);
 - (c) (I,II,III);
 - (d) (I,II,III,IV).