

## Zestaw 3

1. Wyznacz kształt zbioru osiągalnego (tj. zbioru portfeli osiągalnych) w przypadku rynku złożonego z dwóch walorów (ryzykownych), gdy parametry walorów spełniają następujące warunki
  - (a)  $\mu_1 = \mu_2$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2$  oraz  $\rho_{12} \neq 1$ ,
  - (b)  $\mu_1 = \mu_2$  oraz  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ,
  - (c)  $\mu_1 \neq \mu_2$  oraz  $\sigma_1 = \sigma_2$ ,
  - (d)  $\mu_1 \neq \mu_2$  oraz  $\sigma_1 = \sigma_2$  oraz  $\rho_{12} \neq 1$ .
2. Dane są dwa walory ryzykowne o parametrach  $\mu_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\sigma_2$  oraz współczynniku korelacji  $\rho_{12}$ , gdzie  $\mu_1 \neq \mu_2$  oraz  $\rho_{12} \in (-1, 1)$ . Niech  $\Gamma$  będzie krzywą portfeli dopuszczalnych.
  - (a) Wykaż, że  $\Gamma$  jest hiperbolą, której środek leży na osi pionowej.
  - (b) Wyznacz asymptoty  $\Gamma$ .
3. Dysponujemy dwoma walorami ryzykownymi o parametrach  $\mu_1 = 10\%$ ,  $\mu_2 = 4\%$ ,  $\sigma_1 = 5\%$ ,  $\sigma_2 = 4\%$ , przy czym zakładamy, że nie ma możliwości krótkiej sprzedaży. Narysuj wszystkie możliwe portfele składające się z akcji tych spółek na płaszczyźnie  $(\sigma, \mu)$  dla  $\rho \in \{-1, 0, 1\}$ . Zaznacz tę część zbioru portfeli osiągalnych, która stanowi granicę efektywną tego zbioru. Dla każdego  $\rho$  wyznacz portfel o minimalnej wariancji i odchylenie standardowe takiego portfela.
4. (*Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2017*) Oczekiwana stopa zwrotu z akcji spółki A wynosi 15%, zaś odchylenie standardowe stopy zwrotu z akcji tej spółki wynosi 24%. Oczekiwana stopa zwrotu z akcji spółki B wynosi 12%, zaś odchylenie standardowe stopy zwrotu z akcji tej spółki wynosi 18%. Zakładając, że współczynnik korelacji pomiędzy stopami zwrotu z tych akcji wynosi:  $-1$ , określ, której z wymienionych poniżej wartości jest najbliższa oczekiwana stopa zwrotu z portfela złożonego z tych akcji, charakteryzującego się zerowym ryzykiem mierzonym odchyleniem standardowym stopy zwrotu.
  - (a) 12,86%;
  - (b) 13,29%;
  - (c) 13,71%;
  - (d) 14,05%.
5. (*Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2017*) Odchylenie standardowe stopy zwrotu z akcji spółki A wynosi 0,30 rocznie, a z akcji spółki B równe jest 0,40 rocznie. Współczynnik korelacji pomiędzy stopami zwrotu z akcji spółki A i akcji spółki B wynosi  $-1$ . Inwestor zamierza utworzyć z akcji spółek A i B portfel o stopie zwrotu wolnej od ryzyka. Ustal jaką część tego portfela powinny stanowić akcje spółki A. Wskaż najbliższą wartość.

- (a) 12%;
- (b) 43%;
- (c) 57%;
- (d) 400%.

6. (*Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2016*) W tabeli przedstawiono informacje dla dwóch akcji A i B, dla których współczynnik korelacji pomiędzy stopami zwrotu wynosi -1.

Akcja	Oczekiwana stopa zwrotu	Odchylenie standardowe stopy zwrotu
A	20%	32%
B	16%	24%

Inwestor rozważa zainwestowanie środków w jeden z następujących portfeli złożonych z tych dwóch akcji:

- Portfel 1: 24% w A, 76% w B;
- Portfel 2: 34% w A, 66% w B;
- Portfel 3: 44% w A, 56% w B;
- Portfel 4: 54% w A, 46% w B.

Na podstawie powyższych informacji określ, który z wymienionych portfeli leży na granicy efektywnej portfela złożonego z akcji A i B.

- (a) Portfel 1, Portfel 2, Portfel 3, Portfel 4;
- (b) Portfel 1, Portfel 2;
- (c) Portfel 3, Portfel 4;
- (d) Portfel 2, Portfel 3, Portfel 4.

7. Niech  $\mu_1 = 15\%$ ,  $\mu_2 = 12\%$ ,  $\sigma_1 = 0.4$ ,  $\sigma_2 = 0.2$  oraz  $\rho = 1$ . Ile wynosi portfel o minimalnej wariancji? Znajdź jego oczekiwany zwrot i odchylenie standardowe.

8. Niech  $\mu_1 = 12\%$ ,  $\mu_2 = 6\%$ ,  $\sigma_1 = 0.2$ ,  $\sigma_2 = 0.4$  oraz  $\rho = -0.01$ .

- (a) Ile wynosi portfel o minimalnej wariancji? Znajdź jego oczekiwany zwrot i odchylenie standardowe.
- (b) O ile zmieni się wariancja portfela minimalnego, jeżeli przyjmiemy  $\mu_1 = 20\%$ ,  $\mu_2 = 40\%$ .

9. (*Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 1999*) Oczekiwana stopa zwrotu oraz odchylenie standardowe stopy zwrotu z akcji A są wyższe aniżeli oczekiwana stopa zwrotu oraz odchylenie standardowe stopy zwrotu z akcji B. Udział której z akcji jest niższy w portfelu zbudowanym z tych dwóch papierów wartościowych charakteryzującym się minimalnym ryzykiem mierzonym odchyleniem standardowym stopy zwrotu?

- (a) Akcji A;

- (b) Akcji B;
  - (c) Udziały obydwu akcji są jednakowe;
  - (d) W zależności od kowariancji pomiędzy obydwoma akcjami akcji A lub akcji B.
10. (*Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2016*) Inwestor konstruuje portfel złożony z dwóch akcji: A i B. Akcja A ma wyższą wartość odchylenia standardowego stopy zwrotu, zaś akcja B ma niższą wartość odchylenia standardowego stopy zwrotu. Współczynnik korelacji pomiędzy stopami zwrotu z akcji jest wyższy niż  $-1$ . Które z poniższych stwierdzeń dotyczących udziału akcji w portfelu złożonym z tych dwóch akcji charakteryzującym się minimalnym ryzykiem mierzonym odchyleniem standardowym stopy zwrotu jest prawdziwe?
- (a) udział akcji A w takim portfelu jest na pewno niższy niż udział akcji B;
  - (b) udział akcji A w takim portfelu jest na pewno wyższy niż udział akcji B;
  - (c) udziały obydwu akcji A i B w takim portfelu są jednakowe;
  - (d) udział akcji A w takim portfelu może być zarówno wyższy, jak i niższy od udziału akcji B.
11. (*Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2017*) Odchylenie standardowe stopy zwrotu z akcji spółki A wynosi  $0,30$  rocznie, a z akcji spółki B równe jest  $0,20$ . Współczynnik korelacji pomiędzy stopami zwrotu z akcji spółki A i akcji spółki B wynosi  $0,4$ . Inwestor zamierza utworzyć z akcji spółek A i B portfel o minimalnej wariancji stopy zwrotu. Ustal jaką część tego portfela powinny stanowić akcje spółki B. Wskaż najbliższą wartość.
- (a) 15%;
  - (b) 20%;
  - (c) 80%;
  - (d) 85%.
12. (*Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2001*) Portfel składa się z dwóch akcji A i B o zerowej korelacji między sobą, zaś na rynku niedozwolona jest krótka sprzedaż. Proszę obliczyć jaki jest udział akcji A w portfelu charakteryzującym się minimalnym ryzykiem, gdy odchylenie standardowe akcji B jest trzykrotnie większe od odchylenia standardowego akcji A.
- (a) 10%;
  - (b) 25%;
  - (c) 75%;

- (d) 90%.
13. Jeżeli dwa walory mają parametry  $\text{Var}(K_1) = 0.02$ ,  $\text{Var}(K_2) = 0.09$ , a portfel o minimalnej wariancji ma wagi  $(\frac{1}{9}, \frac{8}{9})$ , to ile wynosi  $\text{Cov}(K_1, K_2)$ ?
14. Dane są dwa walory ryzykowne z parametrami  $\sigma_1 = 0.3$ ,  $\sigma_2 = 0.1$ . Zakładamy, że będziemy inwestować w portfel o minimalnej wariancji. Dla jakich współczynników korelacji  $\rho$  zainwestujemy w drugi walor?
15. Czy dla walorów z parametrami  $\mu_1 = 0.8$ ,  $\mu_2 = 0.12$ ,  $\sigma_1 = 0.2$ ,  $\sigma_2 = 0.4$  oraz  $\sigma_{12} = 0.06$  portfel o minimalnej wariancji wymaga krótkiej sprzedaży? Dla jakiej kowariancji krótka sprzedaż nie jest potrzebna?
16. Rozważmy dwa walory z podanymi  $\text{Var}(K_1)$  oraz  $\text{Cov}(K_1, K_2)$ . Dla jakiej wariancji  $\text{Var}(K_2)$  portfel o minimalnej wariancji nie będzie wymagał krótkiej sprzedaży, jeżeli:
- (a)  $\text{Var}(K_1) = 0.04$ ,  $\text{Cov}(K_1, K_2) = -0.01$ ,
  - (b)  $\text{Var}(K_1) = 0.02$ ,  $\text{Cov}(K_1, K_2) = 0.01$ ,
  - (c)  $\text{Var}(K_1) = 0.01$ ,  $\text{Cov}(K_1, K_2) = -0.02$ .
17. Rozważmy dwa walory o parametrach  $\sigma_1 = 0.2$ ,  $\sigma_2 = 0.3$  oraz  $\rho$ . Załóżmy, że krótka sprzedaż nie jest dopuszczalna. Wyznacz najmniejszą osiągalną wariancję, jeżeli
- (a)  $\rho = 0.5$ ,
  - (b)  $\rho = 0.8$ .
18. Dane są dwa walory ryzykowne z parametrami  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ . Zakładamy, że będziemy inwestować w portfel o minimalnej wariancji oraz, że nie ma możliwości krótkiej sprzedaży. Dla jakich współczynników korelacji  $\rho$  zainwestujemy w pierwszy walor, jeżeli:
- (a)  $\sigma_1 = 0.2$ ,  $\sigma_2 = 0.3$ ,
  - (b)  $\sigma_1 = 0.5$ ,  $\sigma_2 = 0.1$
19. Wykaż, że wzór na portfel rynkowy dla dwóch walorów ryzykownych (zob. Theorem 2.10) pokrywa się z wzorem macierzowym (zob. Corollary 2.11).