Zestaw 4

Rozszerzenie portfela o walor wolny od ryzyka. Zbiór portfeli osiągalnych. Brzeg efektywny. Portfel rynkowy. Linia rynku kapitałowego (CML). Metoda mnożników Lagrange'a.

1. Wyznacz kształt zbioru portfeli osiągalnych) w przypadku rynku złożonego z dwóch walorów (ryzykownych) oraz waloru wolnego od ryzyka, gdy parametry walorów ryzykownych spełniają następujące warunki

   (a) $\mu_1 = \mu_2$, $\sigma_1 = \sigma_2$ oraz $\rho_{12} \neq 1$,

   (b) $\mu_1 = \mu_2$ oraz $\sigma_1 \neq \sigma_2$,

   (c) $\mu_1 \neq \mu_2$ oraz $\sigma_1 = \sigma_2$,

   (d) $\mu_1 \neq \mu_2$ oraz $\sigma_1 = \sigma_2$ oraz $\rho_{12} \neq 1$.

   W każdym z powyższych przypadków zaproponuj "sensowne" (z ekonomicznego punktu widzenia) warunki jakie powinna spełniać stopa zwrotu z waloru wolnego od ryzyka..

2. Możemy zainwestować w walor o oczekiwanym zwrocie μ i odchyleniu standardowym σ. Dodatkowo mamy do dyspozycji inwestycję w walor wolny od ryzyka o stopie r_1 lub pożyczkę według stopy r_2. Na płaszczyźnie (σ, μ) zaznacz zbiór wszystkich portfeli osiągalnych.

3. Inwestujemy w dwa walory o parametrach $\mu_1 = 3\%$, $\sigma_1 = 20\%$, $\mu_2 = 9\%$, $\sigma_2 = 40\%$ oraz $\rho = -0.5$. Dodatkowo mamy do dyspozycji walor wolny od ryzyka z $r = 5\%$. Wyznacz wagi portfela rynkowego i oblicz jego oczekiwany zwrot i odchylenie standardowe.

4. Na rynku dane są dwa walory o parametrach μ_1, σ_1, μ_2, σ_2 oraz ρ, oraz walor wolny od ryzyka o stopie $r > 0$. Niech μ_{mvp} będzie oczekiwaną stopą zwrotu portfela o minimalnej wariancji złożonego z walorów ryzykownych. Przypuśćmy, że $r = \mu_{mvp}$. Wykaż, że wówczas nie istnieje portfel rynkowy.

5. *(Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2013)* Jeżeli oczekiwana stopa zwrotu z portfela rynkowego: $rm = 24\%$, w skali rocznej, jej odchylenie standardowe: $sigma = 0,32$, stopa wolna od ryzyka: $f = 8\%$ w skali roku, a portfel rynkowy jest efektywny, to równanie linii rynku kapitałowego, wiążące stopę zwrotu portfela efektywnego r i jej odchylenie standardowe s, ma postać:

   (a) $r = 0,08 + 0,5s$;

   (b) $r = 0,16 + s$;

   (c) $r = 0,23 + 0,08s$;

   (d) $r = 0,08$.

6. W portfelu rynkowym znajdują się dokładnie dwa walory ryzykowne. Walor A, który stanowi 40% wartości portfela, ma oczekiwaną stopę zwrotu równą 10% i odchylenie standardowe stopy zwrotu równe 20%. Walor B ma oczekiwaną stopę zwrotu równą 15% i odchylenie standardowe stopy zwrotu równe 28%. Wiadomo ponadto, że współczynnik korealcji tych dwóch walorów wynosi 0,3, natomiast stopa wolna od ryzyka równa jest 5%. Wyznacz równanie prostej rynku kapitałowego.

7. Rozważmy rynek, który składa sie wyłącznie z waloru wolnego od ryzyka, akcji KGMH i akcji ORLEN. Przypuśćmy, że liczba wszystkich akcji KGHM występujących na rynku wynosi 1000, każda z nich jest warta 20 PLN, natomiast liczba wszystkich akcji ORLEN występujacych na rynku wynosi 2000, każda z nich jest warta 5 PLN. Przypuśćmy również, że wszyscy inwestorzy postępują racjonalnie i inwestują zgodnie z teorią Markowitza. Wyznacz wagi portfela rynkowego.

8. Doradca inwestycyjny Jan Nowak wykorzystuje linię rynku kapitałowego (CML) rekomendując swoim klientom sposoby odpowiedniej alokacji kapitału. Doradca ten, w wyniku przeprowadzonych kalkulacji, otrzymał następujące parametry rynku

   - oczekiwana stopa zwrotu z portfela rynkowego: 12%.
   - Odchylenie standardowe portfela rynkowego: 20%.
   - Stopa wolna od ryzyka: 5%.

   Krzysztof Kowalski korzysta z usług doradczych Jana Nowaka. Informuje go, że chciałby zainwestować w portfel, którego odchylenie standardowe będzie równe połowie odchylenia standardowego portfela rynkowego. Opierając się na CML, jaką oczekiwaną stopę zwrotu może zapewnić swojemu klientowi Jan Nowak, biorąc pod uwagę ograniczenia klienta nałożone na ryzyko inwestycji.

9. Rozważmy problem wyznaczenia minimum funkcji $f(x, y, z) = z$ przy warunku $x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$. Pokaż, że metoda mnożników Lagrange'a nie daje rozwiązania takiego problemu.

10. Rozważmy problem wyznaczenia minimum funkcji $f(x, y, z) = x+y+z$ przy warunku $x^2+y^2+z^2-1 = 0$. Pokaż, że Lagrangian tego problemu posiada dwa miejsca zerowe, z których tylko jedno jest rozwiązaniem rozważanego zagadnienia optymalizacyjnego.

11. Korzystając z metody mnożników Lagrange'a znajdź ekstrema lokalne funkcji f przy zadanych warunkach

    (a) $f(x, y) = 5x - 3y$, przy warunku $x^2 + y^2 = 136$,

    (b) $f(x, y, z) = xyz$, przy warunku $x^+y + z = 1$, $x, y, z > 0$,

    (c) $f(x, y, z) = 4y-2z$, przy warunkach $x+y+z = 5$, $xy+xz+yz = 8$,

    (d) $f(x, y) = xy$, przy warunku $x^2 + y^2 = 2$,

(e) $f(x,y) = x^2 + y^2$, przy warunku $x^3 + y^3 - 16 = 0$,

(f) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, przy warunku $x + y - 1 = 0$,

(g) $f(x,y) = x^3 + y^3$, przy warunku $x + y - 2 = 0$,

(h) $f(x,y) = x + y$, przy warunku $e^{x+y} - xy - 1 = 0$,

(i) $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, przy warunku $x - y + \frac{pi}{4} = 0$,

(j) $f(x,y) = 5x + 3y$, przy warunku $4 \sin x - 3 \cos y = 0$,

(k) $f(x,y,z) = x + y + 2z$, przy warunku $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

(l) $f(x,y,z) = xy^3z^3$, przy warunku $x + 2y + 3z = 1$, $x, y, z > 0$,

(m) $f(x,y,z) = xyz$, przy warunku $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x, y, z > 0$,

(n) $f(x,y,z) = xyz$, przy warunkach $x + y + z = 5$, $xy + xz + yz = 8$,

12. Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji f w zadanym zbiorze D:

(a) $f(x,y) = 4x^2 + 10y^2$, $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$,

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$,, D - trójkąt ograniczony przez proste o równaniach $x = 0$, $y = 0$, $x + y + 3 = 0$.

(c) $f(x,y) = 2xy$, $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$,

(d) $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$, $D = [0, \frac{pi}{2}] \times [0, \frac{pi}{2}]$,

(e) $f(x,y) = 2x^2 - 2y^2$, $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$,

(f) $f(x,y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$,

(g) $f(x,y) = 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2}$, $D = \{(x,y) : \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 \leq 4\}$,

(h) $f(x,y,z) = xyz$, $D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$,

(i) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$, D-bryła (domknięta) ograniczona powierzchniami $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$.

13. Wyznacz największą możliwą objętość prostopadłościanu, którego krawędzie są równoległe do osi układu współrzędnych, i który wpisany jest w elipsoidę

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$