Informatyka, Algebra
- KOLOKWIUM PIERWSZE -
27 listopada 2018

Czas: 90 min.

1. (25 pkt) Niech zbiór X będzie zbiorem wszystkich ciągów 10 wyrazowych o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$, tj.

$$X = \{(a_1, \dots, a_{10}) : \forall i \in \{1, \dots, 10\} : a_i \in \{0, 1\}\}$$

Na zbiorze X wprowadzamy trzy relacje: R_1, R_2, R_3, zdefiniowane jako:

$$aR_1b \Leftrightarrow \exists k \in \{1, \dots, 5\} : a_{2k} = b_{2k},$$
$$aR_2b \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, 5\} : a_{2k} = b_{2k},$$
$$aR_3b \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, 5\} : a_{2k-1} = b_{2k},$$

gdzie $a = (a_1, \dots, a_{10})$, $b = (b_1, \dots, b_{10})$. Przez $\mathcal{R} \subset \{R_1, R_2, R_3\}$ oznaczmy zbiór tych z powyższych relacji, które są relacjami równoważności.

(a) (10 pkt) Wskaż, które z powyżej zdefiniowanych relacji należą, a które nie należą do zbioru $\mathcal{R}$. Odpowiedź uzasadnij.

- Relacja R_1 nie jest relacją równoważności $\boxed{\text{1 pkt}}$, bo nie jest przechodnia $\boxed{\text{1 pkt}}$. Np.

$$(1, 1, \dots, 1)R_1(1, 0, \dots, 0) \ \wedge \ (1, 0, \dots, 0)R_1(0, 0, \dots, 0),$$

ale

$$\sim (1, 1, \dots, 1)R_1(0, 0, \dots, 0). \boxed{\text{1 pkt}}$$

- Relacja R_2 jest relacją równoważności $\boxed{\text{1 pkt}}$, bo
  - jest zwrotna, gdyż
    dla dowolnego $a = (a_1, \dots, a_{10}) \in X$ mamy

$$a_2 = a_2, a_4 = a_4, \dots a_{10} = a_{10},$$

    skąd aR_2a. $\boxed{\text{1 pkt}}$
  - jest symetryczna, gdyż
    dla dowolnych $a = (a_1, \dots, a_{10}), b = (b_1, \dots, b_{10}) \in X$ prawdziwe są implikacje

$$\begin{aligned} aR_2b &\Rightarrow a_2 = b_2, a_4 = b_4, \dots a_{10} = b_{10} \\ &\Rightarrow b_2 = a_2, b_4 = a_4, \dots b_{10} = a_{10} \\ &\Rightarrow bR_2a. \boxed{\text{1 pkt}} \end{aligned}$$

  - jest przechodnia, gdyż
    dla dowolnych $a = (a_1, \dots, a_{10}), b = (b_1, \dots, b_{10}), c = (c_1, \dots, c_{10}) \in X$ prawdziwe są implikacje

$$\begin{aligned} aR_2b \ \wedge \ bR_2c &\Rightarrow a_2 = b_2, a_4 = b_4, \dots a_{10} = b_{10} \ \wedge \ b_2 = c_2, b_4 = c_4, \dots b_{10} = c_{10} \\ &\Rightarrow a_2 = c_2, a_4 = c_4, \dots a_{10} = c_{10} \\ &\Rightarrow aR_1c. \boxed{\text{1 pkt}} \end{aligned}$$

- Relacja R_3 nie jest relacją równoważności $\boxed{\text{1 pkt}}$, bo nie jest zwrotna $\boxed{\text{1 pkt}}$. Np.

$$(1, 0, \dots, 0)R_1(1, 0, \dots, 0) \boxed{\text{1 pkt}}$$

Kolejne podpunkty wykonaj dla każdej relacji ze zbioru $\mathcal{R}$.

(b) (3 pkt) Wyznacz klasę abstrakcji ciągu $a \in X$, którego wszystkie elementy są równe 1. Ile elementów zawiera ta klasa abstrakcji?

Wyznaczamy klasę abstracji a względem relacji R_2. Mamy

$$[(1,\ldots,1)] = \{(b_1,\ldots,b_{10}) \in X : b_2 = b_4 = \ldots = b_{10} = 1\} \boxed{1 \text{ pkt}}$$

Stąd

$$|[(1,\ldots,1)]| = 2^5 \boxed{2 \text{ pkt}}$$

(c) (6 pkt) Który z poniższych zbiorów należy do zbioru ilorazowego? Odpowiedź uzasadnij.

$$A = \{(a_1,\ldots,a_{10}) \in X : a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 5\},$$
$$B = \{(b_1,\ldots,b_{10}) \in X : b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{10} = 0\},$$

$$A = \{(a_1,\ldots,a_{10}) \in X : a_2 = a_4 = \ldots = a_{10} = 1\} \boxed{1 \text{ pkt}}$$
$$= [(1,\ldots,1)] \boxed{1 \text{ pkt}}$$
$$\in X_{/R_2} \boxed{1 \text{ pkt}}$$

$$B = \{(b_1,\ldots,b_{10}) \in X : b_1 = b_1 = \ldots = b_{10} = 0\} \boxed{1 \text{ pkt}}$$
$$\notin X_{/R_2} \boxed{1 \text{ pkt}},$$

bo np. $(1,0,\ldots,0)R_2(0,0,\ldots,0)$, więc $[(0,0,\ldots,0)]$ nie jest jednoelementowa. $\boxed{1 \text{ pkt}}$

(d) (6 pkt) Wyznacz liczbę elementów zbioru ilorazowego.

Zauważmy, że każda klasa abstrakcji ma 2^5 elementów. $\boxed{1 \text{ pkt}}$

Wszystkich elementów zbioru X jest 2^{10}. $\boxed{1 \text{ pkt}}$

Ponieważ $X = \bigcup_{x \in X}[x]$ oraz klasy abstrakcji są parami rozłączne, $\boxed{2 \text{ pkt}}$ więc

$$|X_{/R_2}| = \frac{2^{10}}{2^5} = 2^5 \boxed{2 \text{ pkt}}$$

2. (18 pkt) Dana jest przestrzeń liniowa V nad ciałem $\mathbb{C}$. Wiadomo, że wektory x, y, z stanowią bazę tej przestrzeni. Zbadaj, który z poniższych układów także stanowi jej bazę:

$$B_1 = (x + iy + (1+i)z,\ ix - y + (2-i)z,\ 3z),$$
$$B_2 = (2ix + y,\ 2x - iy + z,\ (1+i)y + (1-i)z).$$

Wyznacz współrzędne wektora $a = 2x + z$ względem tej bazy.

Niech $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. $\boxed{1 \text{ pkt}}$

- Sprawdzamy czy B_1 jest bazą V. W tym celu badamy liniową niezależność wektorów z B_1. Przypuśćmy, że

$$\alpha(x + iy + (1+i)z) + \beta(ix - y + (2-i)z) + \gamma(3z) = \vec{0}.$$

  Jest to równoważne:

$$(\alpha + i\beta)x + (i\alpha - \beta)y + ((1+i)\alpha + (2-i)\beta + 3\gamma)z = \vec{0}.$$

Ponieważ (x, y, z) jest bazą V (a więc w konsekwencji układem liniowo niezależnym), $\boxed{1 \text{ pkt}}$ więc powyższa równość implikuje

$$\boxed{1 \text{ pkt}} \begin{cases} \alpha + i\beta &= 0 \\ i\alpha - \beta &= 0 \\ (1+i)\alpha + (2-i)\beta + 3\gamma &= 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{1 \text{ pkt}} \begin{cases} \alpha &= z \\ \beta &= iz \\ \gamma &= -\frac{(2+3i)z}{3} \end{cases}, z \in \mathbb{C}$$

$$\not\Rightarrow \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{cases}$$

Pokazuje to, że wektory w B_1 nie są liniowo niezależne $\boxed{1 \text{ pkt}}$, a więc nie są bazą V $\boxed{1 \text{ pkt}}$.

- Sprawdzamy czy B_2 jest bazą V. W tym celu badamy liniową niezależność wektorów z B_2. Przypuśćmy, że

$$\alpha(2ix + y) + \beta(2x - iy + z) + \gamma((1+i)y + (1-i)z) = \vec{0}.$$

Jest to równoważne:

$$(2i\alpha + 2\beta)x + (\alpha - i\beta + (1+i)\gamma)y + (\beta + (1-i)\gamma)z = \vec{0}.$$

Ponieważ (x, y, z) jest bazą V (a więc w konsekwencji układem liniowo niezależnym), $\boxed{1 \text{ pkt}}$ więc powyższa równość implikuje

$$\boxed{1 \text{ pkt}} \begin{cases} 2i\alpha + 2\beta &= 0 \\ \alpha - i\beta + (1+i)\gamma &= 0 \\ \beta + (1-i)\gamma &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha &= i\beta \\ \gamma &= 0 \\ \beta &= 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{1 \text{ pkt}} \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{cases}$$

Pokazuje to, że wektory w B_2 są liniowo niezależne $\boxed{1 \text{ pkt}}$, a ponieważ $\dim V = 3$, $\boxed{1 \text{ pkt}}$ więc są bazą V $\boxed{1 \text{ pkt}}$.

- Wyznaczymy współrzędne wektora a w bazie B_2. Przypuśćmy, że

$$\alpha(2ix + y) + \beta(2x - iy + z) + \gamma((1+i)y + (1-i)z) = 2x + z.$$

Jest to równoważne:

$$(2i\alpha + 2\beta)x + (\alpha - i\beta + (1+i)\gamma)y + (\beta + (1-i)\gamma)z = 2x + z.$$

Ponieważ (x, y, z) jest bazą V (a więc w konsekwencji układem liniowo niezależnym), $\boxed{1 \text{ pkt}}$ więc powyższa równość implikuje

$$\boxed{1 \text{ pkt}} \begin{cases} 2i\alpha + 2\beta &= 2 \\ \alpha - i\beta + (1+i)\gamma &= 0 \\ \beta + (1-i)\gamma &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha &= i\beta - i \\ \gamma &= \frac{i}{1+i} \\ \beta &= 1 - \frac{(1-i)i}{1+i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{3 \text{ pkt}} \begin{cases} \alpha &= -i \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= \frac{1+i}{2} \end{cases}$$

Stąd $a = [-i, 0, \frac{1+i}{2}]_{B_2}$. $\boxed{1 \text{ pkt}}$

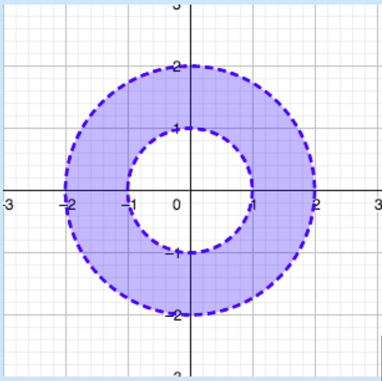
3. (21 pkt) Zilustruj na płaszczyźnie zespolonej zbiory:

   (a) (9 pkt)

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : 1 < z^5\overline{(z^5)} < 1024 \wedge 0 < \arg\left(z^4\right) \leq \pi \right\},$$

Przekształcając nierówności definiujące zbiór A dostajemy

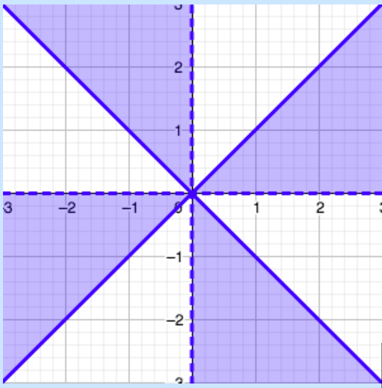
$$\begin{aligned} 1 < z^5\overline{(z^5)} < 1024 &\Leftrightarrow 1 < z^5(\overline{z})^5 < 1024 \ \boxed{1 \text{ pkt}} \\ &\Leftrightarrow 1 < (z\overline{z})^5 < 1024 \\ &\Leftrightarrow 1 < |z|^{10} < 1024 \ \boxed{1 \text{ pkt}} \\ &\Leftrightarrow 1 < |z| < 2 \ \boxed{1 \text{ pkt}} \end{aligned}$$



$\boxed{1 \text{ pkt}}$

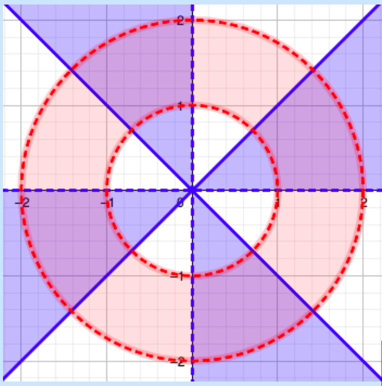
oraz oznaczając $\phi = \arg z \in [0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} 0 < \arg\left(z^4\right) \leq \pi &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 2k\pi < 4\phi \leq \pi + 2k\pi \ \boxed{1 \text{ pkt}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : k\frac{\pi}{2} < \phi \leq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow \phi \in (0, \frac{\pi}{4}] \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi] \cup (\pi, \frac{5}{4}\pi] \cup (\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi] \ \boxed{2 \text{ pkt}} \end{aligned}$$



$\boxed{1 \text{ pkt}}$

Stąd zbiór punktów z A jest częścią wspólną powyższych obszarów:



$\boxed{1 \text{ pkt}}$

(b) (6 pkt)

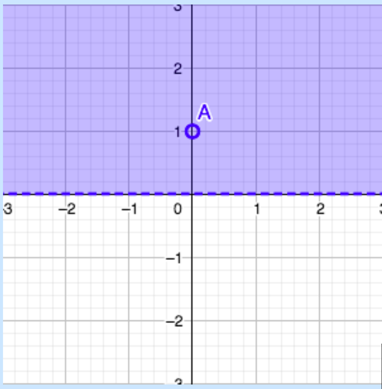
$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{6iz - 6}{z - i} \right| \geq 6 \right\}.$$

Zauważmy, że jeżeli $z \in B$ to $z \neq i$. $\boxed{1 \text{ pkt}}$

Przekształcając nierówność definiującą zbiór B dostajemy

$$\begin{aligned} \left|\frac{6iz-6}{z-i}\right| \geq 6 &\Leftrightarrow |6iz-6| \geq 6\,|z-i| \\ &\Leftrightarrow |iz-1| \geq |z-i| \quad \boxed{\text{1 pkt}} \\ &\Leftrightarrow |i|\,|z+i| \geq |z-i| \\ &\Leftrightarrow |z+i| \geq |z-i| \quad \boxed{\text{1 pkt}} \end{aligned}$$

Stąd zbiór punktów z B jest półpłaszczyzną (z wyłączeniem punktu i), której brzegiem jest symetralna odcinka między punktami $-i$ oraz i.



$\boxed{\text{3 pkt}}$

(c) (6 pkt)

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} : z^6 = (i-1)^{48} \right\}.$$

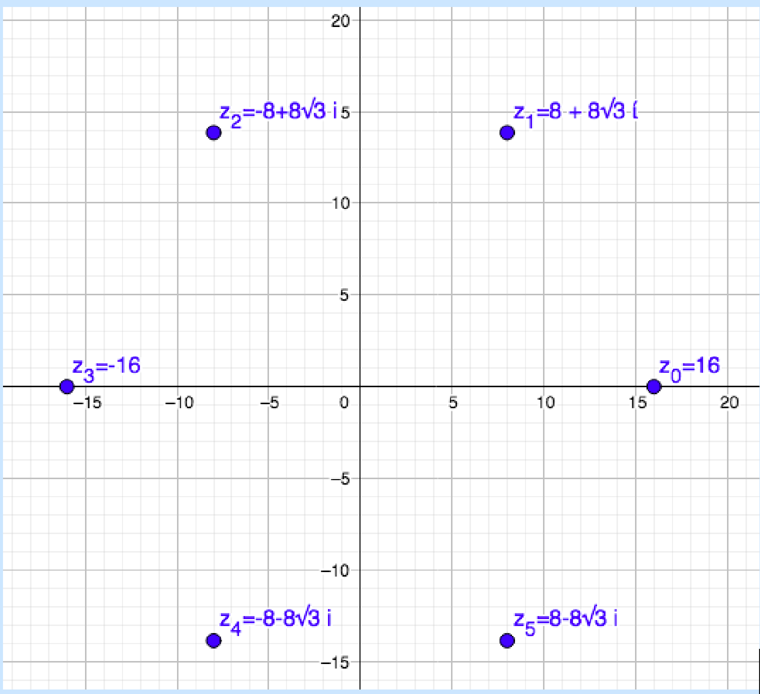
Zbiór C jest zbiorem pierwiastków szóstego stopnia z $(i-1)^{48}$. Zauważmy, że jednym z takich pierwiastków jest liczba $z_0 = (i-1)^8$, $\boxed{\text{1 pkt}}$ bo

$$z_0^6 = ((i-1)^8)^6 = (i-1)^{48}.$$

Korzystając z postaci trygonometrycznej liczby $1-i$, a następnie ze wzoru de'Moivra obliczamy:

$$\begin{aligned} (i-1)^8 &= (\sqrt{2}(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi))^8 \boxed{\text{1 pkt}} \\ &= 2^4(\cos 6\pi + i\sin 6\pi) \\ &= 16. \boxed{\text{1 pkt}} \end{aligned}$$

Pozostałe pierwiastki otrzymujemy obracając punkt z_0 o wielokrotności kąta $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.



$\boxed{\text{3 pkt}}$

IMIĘ I NAZWISKO | | , numer indeksu | |

4. Uzupełnij puste pola:
   (a) (2 pkt) Wymiar przestrzeni V generowanej przez wektory $u = (1, -1, 2)$, $v = (-4, 4, -8)$, $w = (10, 20, 21)$ wynosi $\boxed{2}$, ponieważ

   wektory u i v są liniowo zależne (bo $v = 4u$), ale v i w są liniowo niezależne (bo $\sim \exists \alpha \in \mathbb{R} : \alpha u = w$).

   Stąd $V = \text{Lin} < u, v, w >= \text{Lin} < u, w >$ i $\dim V = 2$. $\boxed{1 \text{ pkt}}$

   (b) (3 pkt) Dane jest ciało $(K, \oplus, \odot)$, którego zerem i jedynką są odpowiednio $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$. Oznaczmy ponadto $u = \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}$, $v = u \odot u$. Wiadomo, że funkcja $h : K \to \mathbb{Q}$ jest izomorfizmem ciał $(K, \oplus, \odot)$ oraz $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Wówczas wartość $h(v)$ wynosi $\boxed{4}$, ponieważ

   $$h(v) = h(u \odot u) = h(u) \cdot h(u) \boxed{1 \text{ pkt}}$$
   $$= h(\mathbf{1} \oplus \mathbf{1}) \cdot h(\mathbf{1} \oplus \mathbf{1}) = (h(\mathbf{1}) + h(\mathbf{1})) \cdot (h(\mathbf{1}) + h(\mathbf{1})) = 2 \cdot 2 = 4, \text{bo } h(\mathbf{1}) = 1 \boxed{1 \text{ pkt}}$$

   (c) (3 pkt) Wiadomo, że jednym z pierwiastków wielomianu $w(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2$ jest $z = i$. Pozostałe pierwiastki tego wielomianu, to

   $$-i \boxed{1 \text{ pkt}}, -1 + i \boxed{1 \text{ pkt}}, -1 - i \boxed{1 \text{ pkt}}$$

   (d) (2 pkt) Rozważmy podprzestrzeń U przestrzeni $\mathbb{R}[x]$ zdefiniowaną jako

   $$U = \{w \in \mathbb{R}[x] : \text{ stopień } w \leq 5 \ \wedge \ w(x) \text{ jest podzielne przez } x^2 - 1\}.$$

   Zbiór $B = \{x - 1, x^2 - 1, x^3 - x, x^4 - 1, x^5 - x\}$ nie jest bazą U, ponieważ

   $$x - 1 \notin U \boxed{2 \text{ pkt}}$$

   (e) (3 pkt) Struktura $(\mathbb{R}, \circ)$ z działaniem $\circ$ określonym wzorem $a \circ b = \ln(e^a + e^b)$ nie jest grupą abelową, ponieważ

   nie posiada elementu neutralnego $\boxed{1 \text{ pkt}}$, bo

   $$a \circ s = a \Leftrightarrow \ln(e^a + e^s) = a \Leftrightarrow e^a + e^s = e^a \Leftrightarrow e^s = 0 \Leftrightarrow s \in \emptyset \boxed{2 \text{ pkt}}$$

   (f) (3 pkt) W zbiorze ilorazowym $\mathbb{Z}/2018$ określamy działania $\oplus, \odot$ następująco

   $$[a] \oplus [b] = [a + b], \ [a] \odot [b] = [a \cdot b].$$

   Struktura $(\mathbb{Z}/2018, \oplus, \odot)$ nie pierścieniem całkowitym, ponieważ

   ma dzielniki zera $\boxed{1 \text{ pkt}}$. Np. $[2] \neq [0], [1009] \neq [0]$, ale $[2] \odot [1009] = [2 \cdot 1009] = [0]$. $\boxed{2 \text{ pkt}}$

   (g) (3 pkt) Relacja R określona na zbiorze $\mathbb{R}$ jako: $aRb \Leftrightarrow a + 1 > b$, nie jest relacją porządku ponieważ

   nie jest przechodnia $\boxed{1 \text{ pkt}}$. Np. dla $a = -0.5, b = 0.25, c = 1$ mamy $aRb \wedge bRc$, ale nie jest prawdą, że aRc. $\boxed{2 \text{ pkt}}$