Informatyka, Algebra
- KOLOKWIUM PIERWSZE -
27 listopada 2018

Czas: 90 min.

1. (25 pkt) Niech zbiór X będzie zbiorem wszystkich ciągów 10 wyrazowych o wyrazach ze zbioru $\{0,1\}$, tj.

$$X = \{(a_1, \ldots, a_{10}) : \forall i \in \{1, \ldots, 10\} : a_i \in \{0,1\}\}$$

Na zbiorze X wprowadzamy trzy relacje: R_1, R_2, R_3, zdefiniowane jako:

$$\begin{aligned} aR_1b &\Leftrightarrow \exists k \in \{1, \ldots, 5\} : a_{2k} = b_{2k}, \\ aR_2b &\Leftrightarrow \forall k \in \{1, \ldots, 5\} : a_{2k} = b_{2k}, \\ aR_3b &\Leftrightarrow \forall k \in \{1, \ldots, 5\} : a_{2k-1} = b_{2k}, \end{aligned}$$

gdzie $a = (a_1, \ldots, a_{10})$, $b = (b_1, \ldots, b_{10})$. Przez $\mathcal{R} \subset \{R_1, R_2, R_3\}$ oznaczmy zbiór tych z powyższych relacji, które są relacjami równoważności.

   (a) (10 pkt) Wskaż, które z powyżej zdefiniowanych relacji należą, a które nie należą do zbioru $\mathcal{R}$. Odpowiedź uzasadnij.

Kolejne podpunkty wykonaj dla każdej relacji ze zbioru $\mathcal{R}$.

   (b) (3 pkt) Wyznacz klasę abstrakcji ciągu $a \in X$, którego wszystkie elementy są równe 1. Ile elementów zawiera ta klasa abstrakcji?

   (c) (6 pkt) Który z poniższych zbiorów należy do zbioru ilorazowego? Odpowiedź uzasadnij.

$$\begin{aligned} A &= \{(a_1, \ldots, a_{10}) \in X : a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 5\}, \\ B &= \{(b_1, \ldots, b_{10}) \in X : b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{10} = 0\}, \end{aligned}$$

   (d) (6 pkt) Wyznacz liczbę elementów zbioru ilorazowego.

2. (18 pkt) Dana jest przestrzeń liniowa V nad ciałem $\mathbb{C}$. Wiadomo, że wektory x, y, z stanowią bazę tej przestrzeni. Zbadaj, który z poniższych układów także stanowi jej bazę:

$$\begin{aligned} B_1 &= (x + iy + (1+i)z,\ ix - y + (2-i)z,\ 3z), \\ B_2 &= (2ix + y,\ 2x - iy + z,\ (1+i)y + (1-i)z). \end{aligned}$$

Wyznacz współrzędne wektora $a = 2x + z$ względem tej bazy.

3. (21 pkt) Zilustruj na płaszczyźnie zespolonej zbiory:

   (a) (9 pkt)
$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : 1 < z^5 \overline{(z^5)} < 1024 \wedge 0 < \arg\left(z^4\right) \leq \pi \right\},$$

   (b) (6 pkt)
$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{6iz - 6}{z - i} \right| \geq 6 \right\}.$$

   (c) (6 pkt)
$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} : z^6 = (i-1)^{48} \right\}.$$

IMIĘ I NAZWISKO ______ ______, numer indeksu ______

4. Uzupełnij puste pola:

(a) (2 pkt) Wymiar przestrzeni V generowanej przez wektory $u = (1, -1, 2)$, $v = (-4, 4, -8)$, $w = (10, 20, 21)$ wynosi ______, ponieważ

(b) (3 pkt) Dane jest ciało $(K, \oplus, \odot)$, którego zerem i jedynką są odpowiednio $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$. Oznaczmy ponadto $u = \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}$, $v = u \odot u$. Wiadomo, że funkcja $h : K \to \mathbb{Q}$ jest izomorfizmem ciał $(K, \oplus, \odot)$ oraz $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Wówczas wartość $h(v)$ wynosi ______, ponieważ

(c) (3 pkt) Wiadomo, że jednym z pierwiastków wielomianu $w(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2$ jest $z = i$. Pozostałe pierwiastki tego wielomianu, to

(d) (2 pkt) Rozważmy podprzestrzeń U przestrzeni $\mathbb{R}[x]$ zdefiniowaną jako

$$U = \{w \in \mathbb{R}[x] : \text{ stopień } w \leq 5 \ \wedge \ w(x) \text{ jest podzielne przez } x^2 - 1\}.$$

Zbiór $B = \{x - 1, x^2 - 1, x^3 - x, x^4 - 1, x^5 - x\}$ nie jest bazą U, ponieważ

(e) (3 pkt) Struktura $(\mathbb{R}, \circ)$ z działaniem $\circ$ określonym wzorem $a \circ b = \ln(e^a + e^b)$ nie jest grupą abelową, ponieważ

(f) (3 pkt) W zbiorze ilorazowym $\mathbb{Z}/2018$ określamy działania $\oplus, \odot$ następująco

$$[a] \oplus [b] = [a + b], \ [a] \odot [b] = [a \cdot b].$$

Struktura $(\mathbb{Z}/2018, \oplus, \odot)$ nie pierścieniem całkowitym, ponieważ

(g) (3 pkt) Relacja R określona na zbiorze $\mathbb{R}$ jako: $aRb \Leftrightarrow a + 1 > b$, nie jest relacją porządku ponieważ