IMIĘ I NAZWISKO [ ] [ ], numer indeksu [ ]

Informatyka, Algebra
- KOLOKWIUM DRUGIE -
22 stycznia 2019

Czas: 90 min.

1. (16 pkt) Prosta k jest dwusieczną kąta rozwartego utworzonego przez proste l i m, gdzie

$$l : \begin{cases} x &= -14 + 3t, \\ y &= 2, \\ z &= 12 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

oraz

$$m : \frac{x+8}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}.$$

Wyznacz odległość prostej k od środka układu współrzędnych.

IMIĘ I NAZWISKO | | , numer indeksu | |

Równanie parametryczne prostej m:

$$\begin{cases} x &= -8+2t, \\ y &= -1+t, \quad ,t\in\mathbb{R} \\ z &= 2-2t \end{cases}$$

Punkt $A=(x_A,y_A,z_A)$ przecięcia prostych l i m spełnia układ równań

$$\begin{cases} x_A &= -14+3t=-8+2s \\ y_A &= 2=-1+s \\ z_A &= 12-4t=2-2s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s &= 3 \\ t &= 4 \end{cases} \wedge A=(-2,2,-4)\boxed{\text{1 pkt}}$$

Na ramionach danego kąta chcemy wyznaczyć punkty A_l, A_m, takie, że $|AA_l|=|AA_m|$ Wektory kierunkowe prostych l i m to odpowiednio

$$v_l=[3,0,-4],\boxed{\text{1 pkt}} \qquad v_m=[2,1,-2]\boxed{\text{1 pkt}}$$

Sprawdzamy, czy wektory te tworzą kąt rozwarty

$$v_l\circ v_m=6+8=14>0\boxed{\text{1 pkt}},$$

więc wektory te tworzą kąt ostry $\boxed{\text{1 pkt}}$. Obliczmy długość danych wektorów:

$$||v_l||=\sqrt{9+16}=5,\boxed{\text{1 pkt}} \qquad ||v_m||=\sqrt{4+1+4}=3\boxed{\text{1 pkt}}$$

Wystarczy więc przyjąć:

$$A_l=A+3v_l=(-2,2,-4)+[9,0,-12]=(7,2,-16)\boxed{\text{1 pkt}}$$
$$A_m=A-5v_m=(-2,2,-4)+[-10,-5,10]=(-12,-3,6)\boxed{\text{1 pkt}}$$

Obliczamy środek S odcinka A_lA_m:

$$S=\frac{A_l+A_m}{2}=(-\frac{5}{2},-\frac{1}{2},-5)\boxed{\text{1 pkt}}$$

Dwusieczna danego kąta to prosta zawierająca odcinek AS. Aby obliczyć jej odległość od środka układu współrzędnych $O=(0,0,0)$ wystarczy obliczyć wysokość h trójkąta ASO opuszczoną na bok AS. Mamy więc

$$\vec{AS}=[-\frac{5}{2}+2,-\frac{1}{2}-2,-5+4]=[-\frac{1}{2},-\frac{5}{2},-1]\boxed{\text{1 pkt}}$$
$$||\vec{AS}||=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{4}+1}=\frac{\sqrt{30}}{2}\boxed{\text{1 pkt}}$$
$$\vec{AS}\times\vec{AO}=[-\frac{1}{2},-\frac{5}{2},-1]\times[2,-2,4]=[-12,0,6]\boxed{\text{1 pkt}}$$
$$||\vec{AS}\times\vec{AO}||=\sqrt{144+36}=3\sqrt{20}\boxed{\text{1 pkt}}$$
$$\begin{aligned} d(O,k)=h&=\frac{||\vec{AS}\times\vec{AO}||}{||\vec{AS}||}\boxed{\text{1 pkt}} \\ &=\frac{3\sqrt{20}}{\frac{\sqrt{30}}{2}} \\ &=2\sqrt{6}\boxed{\text{1 pkt}} \end{aligned}$$

Odpowiedź Szukana odległość wynosi $2\sqrt{6}$

IMIĘ I NAZWISKO | | , numer indeksu | |

2. (21 pkt) Dane jest odwzorowanie liniowe $L : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$, zdefiniowane jako

$$L(ax^2 + bx + c) = (a + b - 2c)x^2 + (2a - 2c)x + (2a + b - 3c)$$

Wyznacz $L^{100}(x^2 + 2)$.

IMIĘ I NAZWISKO ______ ______, numer indeksu ______

Aby wyznaczyć wzór L^{100} zdiagonalizujemy macierz odwzorowania L.
Macierz odwzorowania L w bazie standardowej $B = (1, x, x^2)$ dana jest jako

$$A = M_L(B) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \boxed{3 \text{ pkt}}$$

Wyliczamy wartości własne A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & 2 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda+1)^2 \boxed{1 \text{ pkt}}$$

Stąd wartości własne i ich krotności dane są jako

$$\lambda_1 = 0, k_1 = 1, \boxed{1 \text{ pkt}} \qquad \lambda_2 = -1, k_2 = 2 \boxed{1 \text{ pkt}}$$

Szukamy wektorów własnych:

$$\lambda_1 = 0 : \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 &= s \\ u_2 &= s \\ u_3 &= s \end{cases}, s \in \mathbb{R} \boxed{3 \text{ pkt}} \Leftrightarrow V_0 = Lin\{[1,1,1]_B\}$$

$$\lambda_2 = -1 : \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 &= s \\ u_2 &= 2s - 2t \\ u_3 &= t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R} \boxed{3 \text{ pkt}} \Leftrightarrow V_{-1} = Lin\{[1,2,0]_B, [0,-2,1]_B\}$$

Stąd A możemy zapisać w postaci

$$A = PDP^{-1},$$

gdzie

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boxed{1 \text{ pkt}}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boxed{1 \text{ pkt}}$$

Szukamy macierzy P^{-1}:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \boxed{1 \text{ pkt}}$$

W takim razie

$$A^{100} = PD^{100}P^{-1} \boxed{1 \text{ pkt}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \boxed{1 \text{ pkt}}$$

Ponieważ

$$x^2 + 2 = [2, 0, 1]_B \boxed{1 \text{ pkt}},$$

więc

$$L^{100}(x^2+1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \boxed{1 \text{ pkt}}$$

$$= [4, 2, 1]_B \boxed{1 \text{ pkt}} \quad = x^2 + 2x + 4 \boxed{1 \text{ pkt}}$$

Odpowiedź $L^{100}(x^2+2) = x^2 + 2x + 4.$

IMIĘ I NAZWISKO | | , numer indeksu | |

3. (15 pkt) W zależności od parametrów p i a rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} (2-p)x + y + 2z & = 0 \\ 2x + (1-p)y + 2z & = a \\ 2x + y + (2-p)z & = p \end{cases}$$

W przypadku, gdy układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie wyznacz <u>wyłącznie</u> wartość niewiadomej x.

IMIĘ I NAZWISKO | | |, numer indeksu | |

Zapiszmy podany układ w postaci macierzowej, tj.

$$Ax = b, \quad \text{gdzie } A = \begin{pmatrix} 2-p & 1 & 2 \\ 2 & 1-p & 2 \\ 2 & 1 & 2-p \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ p \end{pmatrix}$$

Obliczamy

$\det A = (1-p)(2-p)^2 + 4 + 4 - 4(1-p) - 2(2-p) - 2(2-p) = -p^3 + 5p^2 = -p^2(p-5)$ $\boxed{\text{2 pkt}}$

Stąd

$$\det A = 0 \Leftrightarrow p = 0 \lor p = 5$$

Rozważamy więc następujące przypadki

- $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$

  Wówczas istnieje dokładnie jedno rozwiązanie układu. $\boxed{\text{1 pkt}}$ Rozwiązanie to wyznaczamy korzystając ze wzorów Cramera. Mamy

  $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & 1-p & 2 \\ p & 1 & 2-p \end{vmatrix} = 2p + 2a - 2p(1-p) - a(2-p) = 2p^2 + ap \boxed{\text{1 pkt}}$$

  Stąd

  $$x = \frac{2p^2 + ap}{-p^2(p-5)} = -\frac{2p+a}{p(p-5)} \boxed{\text{1 pkt}}$$

- $p = 0$

  Wówczas układ przyjmuje postać

  $$\begin{cases} 2x + y + 2z &= 0 \\ 2x + y + 2z &= a \\ 2x + y + 2z &= 0 \end{cases}$$

  Widzimy więc, że układ jest sprzeczny gdy $a \neq 0$ $\boxed{\text{1 pkt}}$, natomiast dla $a = 0$ układ ma nieskończenie wiele rozwiązań. $\boxed{\text{1 pkt}}$ Rozwiązania te są postaci:

  $$\begin{cases} x &= -\frac{1}{2}t - s \\ y &= t \\ z &= s \end{cases}, s, t \in \mathbb{R} \boxed{\text{3 pkt}}$$

- $p = 5$

  Wówczas układ przyjmuje postać

  $$\begin{cases} -3x + y + 2z &= 0 \\ 2x - 4y + 2z &= a \\ 2x + y - 3z &= 5 \end{cases}$$

  Przekształcając układ metodą Gaussa dostajemy kolejno

  $$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & a \\ 2 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)w_1 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & -a \\ 2 & -4 & 2 & a \\ 2 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - 2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & -a \\ 0 & -10 & 10 & 3a \\ 0 & -5 & 5 & 5+2a \end{bmatrix}$$

  $$\xrightarrow{w_3 - \frac{1}{2}w_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & -a \\ 0 & -10 & 10 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 5 + \frac{1}{2}a \end{bmatrix}$$

  Widzimy więc, że układ jest sprzeczny gdy $a \neq -10$ $\boxed{\text{1 pkt}}$, natomiast dla $a = -10$ układ ma nieskończenie wiele rozwiązań. $\boxed{\text{1 pkt}}$ Rozwiązania te są postaci:

  $$\begin{cases} x &= s + 1 \\ y &= s + 3 \\ z &= s \end{cases}, s \in \mathbb{R} \boxed{\text{3 pkt}}$$

IMIĘ I NAZWISKO | | , numer indeksu | |

Odpowiedź Układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie dla $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$. Wówczas $x = -\frac{2p+a}{p(p-5)}$. Układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań, gdy

- $p = 0, a = 0$. Wówczas

$$\begin{cases} x &= -\frac{1}{2}t - s \\ y &= t \qquad\qquad , s, t \in \mathbb{R} \\ z &= s \end{cases}$$

- $p = 5, a = -10$. Wówczas

$$\begin{cases} x &= 9s + 25 \\ y &= s + 3 \qquad , s \in \mathbb{R} \\ z &= s \end{cases}$$

W pozostałych przypadkach układ jest sprzeczny.

IMIĘ I NAZWISKO [ ] [ ], numer indeksu [ ]

4. (20 pkt) *Uzupełnij puste pola/zaznacz właściwą odpowiedź. UWAGA! Zaznaczenie właściwej odpowiedzi bez podania - przynajmniej częściowo dobrego - uzasadnienia nie jest punktowane!*

(a) (4 pkt) Dane są macierze

$$A = \begin{pmatrix} \sin 2019 & \cos 2019 & 0 \\ -\cos 2019 & \sin 2019 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt[2019]{2019} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

I. Wartość $\det(A^{2019})$ wynosi $\boxed{-2019}$, ponieważ

$det(A^{2019}) = det(A)^{2019} = (-\sqrt[2019]{2019})^{2019} = -2019$ $\boxed{2\text{ pkt}}$

II. Wektor $v = (1, 2, -1, -2)^T$ jest wektorem własnym macierzy B: ■ **PRAWDA** ☐ FAŁSZ ponieważ

$Bv = (-2, -4, 2, 4)^T = -2v$ $\boxed{2\text{ pkt}}$

(b) (10 pkt) Wiadomo, że U i V są przestrzeniami wektorowymi o wymiarach odpowiednio 6 i 4, a $f : U \to V$ jest odwzorowaniem liniowym. Jeżeli Ker f = Lin$\{u_1, u_2\}$ dla pewnych dwóch liniowo niezależnych wektorów $u_1, u_2 \in U$, to

I. f jest epimorfizmem: ■ **PRAWDA** ☐ FAŁSZ , ponieważ

$(dimImf = dimU - dimKerf = 4 = dimV \wedge Imf \subset V) \Rightarrow Imf = V.$ $\boxed{2\text{ pkt}}$

II. f jest monomorfizmem: ☐ PRAWDA ■ **FAŁSZ** , ponieważ

$dimKerf = 2 \neq 0$ $\boxed{2\text{ pkt}}$

III. f jest odwzorowaniem odwracalnym: ☐ PRAWDA ■ **FAŁSZ** , ponieważ

nie jest injekcją. $\boxed{2\text{ pkt}}$

IV. rząd macierzy odwzorowania f jest równy: ☐ 0 ☐ 2 ■ **4** ☐ 6 , ponieważ

$dimImf = 4$ $\boxed{2\text{ pkt}}$

V. wyznacznik macierzy odwzorowania f: ☐ jest równy 0 ☐ jest różny od 0 ■ **nie istnieje** , ponieważ

macierz odwzorowania f jest wymiaru 4×6, a więc nie jest kwadratowa. $\boxed{2\text{ pkt}}$

(c) (2 pkt) Jeżeli macierz A jest diagonalizowalna, to jest odwracalna: ☐ PRAWDA ■ **FAŁSZ** , ponieważ

np. macierz A wymiaru 1×1 postaci $A = [0]$ jest diagonalizowalna (jej postać diagonalna to $[0]$), ale nie jest odwracalna (bo dla dowolnej macierzy B wymiaru 1×1 mamy $AB = [0]$). $\boxed{2\text{ pkt}}$

(d) (2 pkt) Jeżeli A jest macierzą spełniającą $I + A + 2A^2 + 3A^3 = 0$, to A^{-1} jest równa $\boxed{-I - 2A - 3A^2}$, ponieważ

$I = -A - 2A^2 - 3A^3 = A(-I - 2A - 3A^2) = (-I - 2A - 3A^2)A$ $\boxed{2\text{ pkt}}$

(e) (2 pkt) Odwzorowanie $L : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$ zdefiniowane jako $(Lp)(x) = p'(x) - p(x-1)$, nie jest odwzorowaniem liniowym: ☐ PRAWDA ■ **FAŁSZ** , ponieważ

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \forall p, q \in \mathbb{R}[x]_3 : (L(\alpha p + \beta q))(x) = (\alpha p + \beta q)'(x) - (\alpha p + \beta q)(x-1) = \alpha p'(x) - \alpha p(x-1) + \beta q'(x) - \beta q(x-1) = (\alpha(Lp) + \beta(Lq))(x)$ $\boxed{2\text{ pkt}}$