WMS, DMRF
- KOLOKWIUM PIERWSZE -
27 listopada 2018

Czas: 90 min.
Uwaga! Wszystkie wyniki należy podać w postaci ułamka zwykłego.

1. (a) (5 pkt) Podaj twierdzenie podające WKW na brak arbitrażu na rynku podstawowym w modelu trójmianowym z jedną akcją i jednym walorem wolnym od ryzyka.

1 *Niech dany będzie model jednokrokowy trójmianowy z jedną akcją i jednym walorem wolnym od ryzyka. Załóżmy, że wartość stopy zwrotu z akcji w scenariuszu u, m, d wynosi odpowiednio U, M, D, gdzie $U > M > D$, natomiast stopa wolna od ryzyka wynosi R.* $\boxed{2\ pkt}$
Wówczas model ten nie dopuszcza możliwości arbitrażu, wtedy i tylko wtedy, gdy $D < R < U$. $\boxed{3\ pkt}$

(b) (5 pkt) Rozważmy model trójmianowy, w którym:

$$A(0) = 1,\ A(1) = 1.1,\ S(0) = 100,\ S^u = 110,\ S^m = 100,\ S^d = 90.$$

Czy taki model dopuszcza arbitraż? Jeżeli tak, to wskaż i opisz strategię arbitrażową.

Obliczając parametry modelu mamy

$$R = 10\%,\ D = -10\%,\ U = 10\%.$$

Ponieważ nie jest spełniona nierówność $D < R < U$, więc model ten dopuszcza arbitraż. $\boxed{1\ \text{pkt}}$
Szukamy strategii arbitrażowej (x, y). Stopa zwrotu z akcji jest zbyt mała ($U \leq R$), w takim razie akcja jest za droga i powinniśmy ją sprzedać. Wystarczy więc przyjąć $x = -1$. Wartość y dobieramy tak, aby $V_{(x,y)}(0) = xS(0) + yA(0) = 0$. Strategią arbitrażową będzie więc

$$x = -1,\ y = 100. \quad \boxed{2\ \text{pkt}}$$

- W chwili $t = 0$: $\boxed{1\ \text{pkt}}$
  - Pożyczam i krótko sprzedaję jedną akcję S za 100,
  - Kupuję 100 jednostek rachunku bankowego za 100 (tj. lokuję na lokacie w banku 100).
- W chwili $t = 1$: $\boxed{1\ \text{pkt}}$
  - Sprzedaję 100 jednostek rachunku bankowego za 110 (tj. wybieram z lokaty w banku 110).
  - Odkupuję jedną akcję S za $S(1)$ i oddaję pożyczkodawcy.

Mój zysk z takiej strategii:

$$\begin{cases} 110 - 110, & \text{gdy } \omega = u \\ 110 - 100, & \text{gdy } \omega = m \\ 110 - 90, & \text{gdy } \omega = d \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \omega = u \\ 10, & \text{gdy } \omega = m \\ 20, & \text{gdy } \omega = d \end{cases}$$

2. (9 pkt) Na rynku dostępna jest europejska opcja kupna na akcję spółki A. Bieżąca cena akcji spółki A wynosi $S_0 = 200PLN$. Przyjmujemy dwa scenariusze rozwoju rynku finansowego:

- scenariusz 1: po roku cena akcji spółki A wzrośnie o 10
- scenariusz 2: po roku cena akcji spółki A spadnie o 15

Inwestor zajmuje długą pozycję w europejskiej opcji kupna wystawionej na akcję spółki A o cenie wykonania równej S_0 i okresie do wykonania równym 1 rok. W celu osłony pozycji inwestor stosuje strategie zabezpieczającą delta hedging polegającą na stworzeniu w chwili $t = 0$ portfela, który replikuje wypłatę z opcji w chwili wykonania. Portfel replikujący składa się z:

- akcji spółki A w ilości Δ_0 (zakładamy idealną podzielność aktywów)
- instrumentu wolnego od ryzyka o wartości w chwili $t = 0$ równej B_0.

Instrument wolny od ryzyka zarabia w skali roku stopę 6%. Zakładamy, że akcja spółki A nie wypłaca dywidendy. Ile wynosi wartość B_0 instrumentu wolnego od ryzyka?

Korzystając z danych: $S(0) = 200$, $U = 10\%$, $D = -15\%$, mamy

$$S(1) = \begin{cases} S(0)(1+U) & \text{gdy } \omega = u \\ S(0)(1+D) & \text{gdy } \omega = d \end{cases} \quad \boxed{\text{1 pkt}}$$
$$= \begin{cases} 220 & \text{gdy } \omega = u \\ 170 & \text{gdy } \omega = d \end{cases} \quad \boxed{\text{1 pkt}}$$

Wypłata z opcji call wynosi

$$C(1) = (S(1) - K)^+ \quad \boxed{\text{1 pkt}}$$
$$= \begin{cases} 20 & \text{gdy } \omega = u \\ 0 & \text{gdy } \omega = d \end{cases} \quad \boxed{\text{1 pkt}}$$

- I sposób:
  Poszukujemy portfela replikującego wypłatę z opcji, przy czym Δ_0 jest ilością akcji w tym portfelu, a B_0 wartością (w chwili 0) instrumentu wolnego od ryzyka. Z treści zadania dostejmy, że wartość instrumentu wolego od ryzyka w chwili 1 wynosi $B_0(1+R) = 1.06 B_0$ $\boxed{\text{1 pkt}}$. Z definicji portfela replikującego mamy natomiast:

$$V(1) = C(1) \Longrightarrow \Delta_0 S(1) + (1+R)B_0 = C(1) \quad \boxed{\text{2 pkt}}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 220\Delta_0 + 1.06B_0 = 20 \\ 170\Delta_0 + 1.06B_0 = 0 \end{cases} \quad \boxed{\text{1 pkt}}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \Delta_0 = \frac{2}{5} \\ B_0 = -\frac{3400}{53} \end{cases} \quad \boxed{\text{1 pkt}}$$

- II sposób:
  Z treści zadania mamy $A(1) = (1 + 6\%)A(0)$. Przyjmijmy $A(0) = 1$. Szukamy portfela replikującego wypłatę z opcji:

$$V_{(x,y)}(1) = C(1) \Longrightarrow xS(1) + yA(1) = C(1) \quad \boxed{\text{1 pkt}}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 220x + 1.06y = 20 \\ 170x + 1.06y = 0 \end{cases} \quad \boxed{\text{1 pkt}}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = -\frac{3400}{53} \end{cases} \quad \boxed{\text{1 pkt}}$$

  Wartość B_0 instrumentu wolnego od ryzyka w portfelu replikującym wynosi

$$B_0 = yA(0) \quad \boxed{\text{1 pkt}}$$
$$= -\frac{3400}{53}. \quad \boxed{\text{1 pkt}}$$

Odpowiedź $B_0 = -\frac{3400}{53}$

3. (11 pkt) Udowodnić, że w modelu dwumianowym wolnym od arbitrażu cena europejskiej opcji kupna z ceną wykonania $K \in (S^d, S^u)$ rośnie jeśli rośnie U. Pokazać, że maleje jesli rośnie D.

Korzystając z prawdopodobieństw martyngałowych cena opcji w chwili 0 wyraża się wzorem

$$C(0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{C}(1)) \quad \boxed{\text{1 pkt}}$$
$$= \frac{1}{1+R}(q \cdot C^u + (1-q) \cdot C^d)$$

Jeżeli U, D są takie, że $K \in (S^d, S^u)$, to powyższa równość implikuje

$$\begin{aligned} C(0) &= \frac{1}{1+R}(q \cdot (S(0)(1+U) - K) + (1-q) \cdot 0) \\ &= \frac{R-D}{1+R} \cdot \frac{S(0)(1+U)-K}{U-D} \quad \boxed{2 \text{ pkt}} \end{aligned}$$

Aby zbadać monotoniczność ceny w zależności od parametru U obliczamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(0)}{\partial U} &= \frac{R-D}{1+R} \cdot \frac{S(0)(U-D) - (S(0)(1+U)-K)}{(U-D)^2} \\ &= \frac{R-D}{1+R} \cdot \frac{K - S(0)(1+D)}{(U-D)^2} \quad \boxed{2 \text{ pkt}} \\ &> 0 \quad \boxed{1 \text{ pkt}}, \end{aligned}$$

przy czym ostatnia nierówność jest konsekwencją nierówności: $R > D$ (wynika z założenia o braku arbitrażu), $K > S^d$ (wynika z założenia o K), $R > -1$ (wynika z założeń modelu). $\boxed{1 \text{ pkt}}$
Pokazuje to, że cena jest rosnąca ze względu na parametr U.
Podobnie, aby zbadać monotoniczność ceny w zależności od parametru D obliczamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(0)}{\partial D} &= \frac{S(0)(1+U)-K}{1+R} \cdot \frac{-(U-D)+(R-D)}{(U-D)^2} \\ &= \frac{S(0)(1+U)-K}{1+R} \cdot \frac{R-U}{(U-D)^2} \quad \boxed{2 \text{ pkt}} \\ &< 0 \quad \boxed{1 \text{ pkt}} \end{aligned}$$

przy czym ostatnia nierówność jest konsekwencją nierówności: $R < U$ (wynika z założenia o braku arbitrażu), $K < S^u$ (wynika z założenia o K), $R > -1$ (wynika z założeń modelu). $\boxed{1 \text{ pkt}}$
Pokazuje to, że cena jest malejąca ze względu na parametr D.

IMIĘ I NAZWISKO ____ ____, numer indeksu ____

4. (10 pkt) Dany jest model trójmianowy z jedną akcją S_1 i instrumentem wolnym od ryzyka A. Cena akcji w chwili 0 jest równa $S(0) = S_0$, natomiast w chwili 1 może przyjąć jedną z trzech wartości: S_1^u, S_1^m, S_1^d (odpowiednio w scenariuszu u, m, d), przy czym $S_1^u > S_1^m > S_1^d$. Stopa wolna od ryzyka wynosi R. Wiadomo, że ogólna postać prawdopodobieństw martyngałowych w tym modelu jest następująca:

$$\begin{cases} q_u = \alpha \\ q_m = \frac{4}{3} - 2\alpha \\ q_d = -\frac{1}{3} + \alpha \end{cases}, \text{ gdzie } \alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Wybierz właściwą odpowiedź, a następnie **krótko** ją uzasadnj:

(a) (2 pkt) W modelu tym istnieje/**nie istnieje** strategia arbitrażowa, bo

na mocy pierwszego twierdzenia fundamentalnego z istnienia miary martyngałowej wynika, że model jest wolny od arbitrażu.

(b) (2 pkt) Model ten jest/**nie jest** zupełny, bo

na mocy drugiego twierdzenia fundamentalnego z braku jedyności miary martyngałowej wynika, że model nie jest zupełny.

(c) (2 pkt) Opcja put P o cenie wykonania $K = S_1^m$ jest/**nie jest** w tym modelu osiągalna, bo

wypłata z tej opcji w chwili 1 jest niezerowa tylko dla $\omega = d$ i wynosi wówczas $S_1^m - S_1^d$, skąd przedział bezarbitrażowy dla tej opcji to

$$I_P = \{\frac{1}{1+R}(-\frac{1}{3} + \alpha)(S_1^m - S_1^d) : \alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\} = (0, \frac{S_1^m - S_1^d}{3 + 3R}),$$

a więc nie jest jednoelementowy (co implikuje nieistnienie portfela replikującego).

(d) (2 pkt) Przedział bezarbitrażowy dla instrumentu pochodnego o wypłacie $H(1)$, której możliwe wartości spełniają równanie $H^u - 2H^m + H^d = 0$ **zawiera**/nie zawiera wartości H^{sub}, bo

jest jednoelementowy - na mocy następujących równości:

$$I_H = \{\frac{1}{1+R}(\alpha H^u + (\frac{4}{3} - 2\alpha)H^m + (-\frac{1}{3} + \alpha)(H^d) : \alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\} = \{\frac{1}{1+R}(\frac{4}{3}H^m - \frac{1}{3}H^d)\}.$$

Jedoelementowość przedziału I_H implikuje natomiast równość $I_H = \{H^{\text{sub}}\} = \{H^{\text{super}}\}$.

(e) (2 pkt) Rozważmy instrument pochodny o wypłacie $H(1)$ (przyjmującej w scenariuszach u, m, d wartości odpowiednio $H^u, H^m, H^d = 0$). Przypuśćmy, że w modelu istnieje portfel replikujący ten instrument. Wówczas jego uczciwa cena $H(0)$ wyrażona w terminach H^m, H^d, R, wynosi

$$H(0) = \frac{\frac{4}{3}H^m - \frac{1}{3}H^d}{1+R},$$

gdyż

$$I_H = \{\frac{1}{1+R}(\alpha H^u + (\frac{4}{3} - 2\alpha)H^m + (-\frac{1}{3} + \alpha)(H^d) : \alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\} = \{\frac{1}{1+R}(\frac{4}{3}H^m - \frac{1}{3}H^d)\}.$$