WMS, DMRF
- KOLOKWIUM PIERWSZE -
27 listopada 2018

Czas: 90 min.
Uwaga! Wszystkie wyniki należy podać w postaci ułamka zwykłego.

1. (a) (5 pkt) Podaj twierdzenie podające WKW na brak arbitrażu na rynku podstawowym w modelu trójmianowym z jedną akcją i jednym walorem wolnym od ryzyka.
   (b) (5 pkt) Rozważmy model trójmianowy, w którym:
   $$A(0) = 1,\ A(1) = 1.1,\ S(0) = 100,\ S^u = 110,\ S^m = 100,\ S^d = 90.$$
   Czy taki model dopuszcza arbitraż? Jeżeli tak, to wskaż i opisz strategię arbitrażową.

2. (9 pkt) Na rynku dostępna jest europejska opcja kupna na akcję spółki A. Bieżąca cena akcji spółki A wynosi $S_0 = 200PLN$. Przyjmujemy dwa scenariusze rozwoju rynku finansowego:

   - scenariusz 1: po roku cena akcji spółki A wzrośnie o 10
   - scenariusz 2: po roku cena akcji spółki A spadnie o 15

   Inwestor zajmuje długą pozycję w europejskiej opcji kupna wystawionej na akcję spółki A o cenie wykonania równej S_0 i okresie do wykonania równym 1 rok. W celu osłony pozycji inwestor stosuje strategie zabezpieczającą delta hedging polegającą na stworzeniu w chwili $t = 0$ portfela, który replikuje wypłatę z opcji w chwili wykonania. Portfel replikujący składa się z:

   - akcji spółki A w ilości Δ_0 (zakładamy idealną podzielność aktywów)
   - instrumentu wolnego od ryzyka o wartości w chwili $t = 0$ równej B_0.

   Instrument wolny od ryzyka zarabia w skali roku stopę 6%. Zakładamy, że akcja spółki A nie wypłaca dywidendy. Ile wynosi wartość B_0 instrumentu wolnego od ryzyka?

3. (11 pkt) Udowodnić, że w modelu dwumianowym wolnym od arbitrażu cena europejskiej opcji kupna z ceną wykonania $K \in (S^d, S^u)$ rośnie jeśli rośnie U. Pokazać, że maleje jesli rośnie D.

IMIĘ I NAZWISKO | | , numer indeksu | |

4. (10 pkt) Dany jest model trójmianowy z jedną akcją S_1 i instrumentem wolnym od ryzyka A. Cena akcji w chwili 0 jest równa $S(0) = S_0$, natomiast w chwili 1 może przyjąć jedną z trzech wartości: S_1^u, S_1^m, S_1^d (odpowiednio w scenariuszu u, m, d), przy czym $S_1^u > S_1^m > S_1^d$. Stopa wolna od ryzyka wynosi R. Wiadomo, że ogólna postać prawdopodobieństw martyngałowych w tym modelu jest następująca:

$$\begin{cases} q_u = \alpha \\ q_m = \frac{4}{3} - 2\alpha \\ q_d = -\frac{1}{3} + \alpha \end{cases} \quad , \text{ gdzie } \alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Wybierz właściwą odpowiedź, a następnie **krótko** ją uzasadnj:

(a) (2 pkt) W modelu tym $\boxed{\text{istnieje/nie istnieje}}$ strategia arbitrażowa, bo

(b) (2 pkt) Model ten $\boxed{\text{jest/nie jest}}$ zupełny, bo

(c) (2 pkt) Opcja put P o cenie wykonania $K = S_1^m$ $\boxed{\text{jest/nie jest}}$ w tym modelu osiągalna, bo

(d) (2 pkt) Przedział bezarbitrażowy dla instrumentu pochodnego o wypłacie $H(1)$, której możliwe wartości spełniają równanie $H^u - 2H^m + H^d = 0$ $\boxed{\text{zawiera/nie zawiera}}$ wartości H^{sub}, bo

(e) (2 pkt) Rozważmy instrument pochodny o wypłacie $H(1)$ (przyjmującej w scenariuszach u, m, d wartości odpowiednio $H^u, H^m, H^d = 0$). Przypuśćmy, że w modelu istnieje portfel replikujący ten instrument. Wówczas jego uczciwa cena $H(0)$ wyrażona w terminach H^m, H^d, R, wynosi