IMIĘ I NAZWISKO | | , numer indeksu | |

WMS, DMRF
- KOLOKWIUM DRUGIE -
22 stycznia 2019

Czas: 90 min.

1. (12 pkt) Proces ceny akcji S(t) przedstawia tabela

$t\|\omega$	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$t=0$	7	7	7	7
$t=1$	11	11	4	4
$t=2$	13	10	6	2

Tabela podaje wartości $S(t, \omega_k)$ procesu $S(t)$ dla poszczególnych zdarzeń elementarnych ω_k, $k = 1, 2, 3, 4$. Zdarzenie $\omega_k \in \Omega$ należy w modelu interpretować jako ścieżkę wzrostów i spadków ceny akcji w trzech kolejnych okresach $t = 0, 1, 2$, zaś Ω jest przestrzenią zdarzeń elementarnych. Rozważmy stwierdzenia:

I. Element F_1 filtracji F generowanej przez proces $S(t)$ ma postać

$$F_1 = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}.$$

II. Jeżeli wzrosty i spadki cen akcji w modelu są jednakowo prawdopodobne, to warunkowa wartość oczekiwana $\boldsymbol{E}(S(t = 2)|F_1)$ przyjmuje wartość 5.5 dla ω_3, ω_4.

III. Jeżeli wzrosty i spadki cen akcji w modelu są jednakowo prawdopodobne, to warunkowa wartość oczekiwana $\boldsymbol{E}(S(t = 2)|F_1)$ przyjmuje wartość 11.5 dla ω_1, ω_2.

IV. Jeżeli stopa wolna od ryzyka przekracza $\frac{2}{11}$, to miara martyngałowa nie istnieje.

Podaj liczbę prawdziwych stwierdzeń wśród powyższych. Odpowiedź uzasadnij!

IMIĘ I NAZWISKO , numer indeksu

I. Prawda.
Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= \sigma(S(0), S(1)) \\ &= \sigma(S(1)) \quad (\text{ bo } S(0) = const) \\ &= \sigma(\{\omega : S(1,\omega) = 11\}, \{\omega : S(1,\omega) = 4\}) \\ &= \sigma(\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}) \\ &= \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}. \boxed{3 \text{ pkt}}\end{aligned}$$

II. Fałsz.
Zauważmy, że jeżeli wzrosty i spadki są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo dowolnego $\omega \in \Omega$ wynosi

$$\mathbb{P}(\omega) = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}. \boxed{1 \text{ pkt}}$$

Z poprzedniego podpunktu dostajemy, że $\mathcal{F}_1$ jest filtracją generowaną przez podział $\mathcal{P}_1 = \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}$. Stąd dla $\omega \in \{\omega_3, \omega_4\}$ mamy

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(S(t=2)|F_1)(\omega) &= \frac{\boldsymbol{E}(S(2)\mathbb{1}_{\{\omega_3,\omega_4\}})}{\mathbb{P}(\{\omega_3, \omega_4\})} \boxed{1 \text{ pkt}} \\ &= \frac{6 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8}}{\frac{2}{8}} \\ &= 4 \boxed{1 \text{ pkt}}\end{aligned}$$

III. Prawda.
Rozumując podobnie jak w poprzednim podpunkcie mamy dla $\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(S(t=2)|F_1)(\omega) &= \frac{\boldsymbol{E}(S(2)\mathbb{1}_{\{\omega_1,\omega_2\}})}{\mathbb{P}(\{\omega_1, \omega_2\})} \boxed{1 \text{ pkt}} \\ &= \frac{13 \cdot \frac{1}{8} + 10 \cdot \frac{1}{8}}{\frac{2}{8}} \\ &= 11.5 \boxed{2 \text{ pkt}}\end{aligned}$$

IV. Prawda.
Przyjmując standardową notację z drzewa dwumianowego, mamy

$$\frac{S^{uu} - S^u}{S^u} = \frac{13 - 11}{11} = \frac{2}{11} \boxed{2 \text{ pkt}}$$

Jeżeli $R > \frac{2}{11}$ to stopa zwrotu z akcji w chwili 2, w scenariuszu u nie spełnia warunku $D < R < U$. W takim razie w tym fragmencie drzewa dwumianowego nie jest spełniony warunek istnienia miary martyngałowej, co implikuje jej nieistnienie w całym drzewie. $\boxed{1 \text{ pkt}}$

Odpowiedź Wśród powyższych prawdziwe są 3 stwierdzenia.

IMIĘ I NAZWISKO | | , numer indeksu | |

2. (14 pkt) Niech $S(0) = 100$, $U = 0.2$, $D = -0.1$, $A(0) = 10$, $R = 0.05$. Znajdź portfel replikujący opcję o terminie zapadalności $N = 2$ i wypłacie

$$H(2) = \mathbb{1}_{\{S(2)>120\}} + \mathbb{1}_{\{S(2)>100\}}.$$

Podaj uczciwą cenę tej opcji w chwili 0.

IMIĘ I NAZWISKO [ ] [ ], numer indeksu [ ]

Drzewo cen akcji: $\boxed{1 \text{ pkt}}$

Wypłata z opcji

$$H(2) = \mathbb{1}_{\{S(2)>120\}} + \mathbb{1}_{\{S(2)>100\}} = \begin{cases} 2, & \text{gdy } \omega \in B_{uu} \\ 1, & \text{gdy } \omega \in B_{ud} \\ 1, & \text{gdy } \omega \in B_{du} \\ 0, & \text{gdy } \omega \in B_{dd} \end{cases} \boxed{1 \text{ pkt}}$$

Szukamy $x(2), y(2)$

$$x(2) = \begin{cases} x^u(2), & \text{gdy } \omega \in B_u \\ x^d(2), & \text{gdy } \omega \in B_d. \end{cases}, \quad y(2) = \begin{cases} y^u(2), & \text{gdy } \omega \in B_u \\ y^d(2), & \text{gdy } \omega \in B_d. \end{cases},$$

spełniających następujące równanie

$$\begin{cases} x^u(2)S^{uu}(2) + y^u(2)A(2) & = H^{uu}(2) \\ x^u(2)S^{ud}(2) + y^u(2)A(2) & = H^{ud}(2) \end{cases}, \quad \begin{cases} x^d(2)S^{du}(2) + y^d(2)A(2) & = H^{du}(2) \\ x^d(2)S^{dd}(2) + y^d(2)A(2) & = H^{dd}(2) \end{cases}.$$

Stąd:

$$\begin{cases} 144x^u(2) + 11.025y^u(2) & = 2 \\ 108x^u(2) + 11.025y^u(2) & = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 108x^d(2) + 11.025y^d(2) & = 1 \\ 81x^d(2) + 11.025y^d(2) & = 0 \end{cases}.$$

co implikuje

$$\begin{cases} x^u(2) & = \frac{1}{36} \\ y^u(2) & = -\frac{80}{441} \end{cases}, \boxed{2 \text{ pkt}} \quad \begin{cases} x^d(2) & = \frac{1}{27} \\ y^d(2) & = -\frac{40}{147} \end{cases}. \boxed{2 \text{ pkt}}$$

W takim razie

$$x(2) = \begin{cases} \frac{1}{36}, & \text{gdy } \omega \in B_u \\ \frac{1}{27}, & \text{gdy } \omega \in B_d. \end{cases}, \boxed{1 \text{ pkt}} \quad y(2) = \begin{cases} -\frac{80}{441}, & \text{gdy } \omega \in B_u \\ -\frac{40}{147}, & \text{gdy } \omega \in B_d. \end{cases}, \boxed{1 \text{ pkt}}$$

Obliczamy $H(1)$ z warunku samofinansowania

$$\begin{aligned} H(1) &= V_{(x,y)}(1) \quad \text{(z Prawa Jednej Ceny)} \\ &= x(2)S(1) + y(2)A(1) \quad \text{(z war. samofinansowania)} \\ &= \begin{cases} \frac{10}{7}, & \text{gdy } \omega \in B_u \\ \frac{10}{21}, & \text{gdy } \omega \in B_d. \end{cases} \boxed{2 \text{ pkt}} \end{aligned}$$

Szukamy $(x(1), y(1))$, dla których

$$H(1) = x(1)S(1) + y(1)A(1)$$

Stąd

$$\begin{cases} x(1)S^u(1) + y(1)A(1) & = H^u(1) \\ x(1)S^d(1) + y(1)A(1) & = H^d(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 120x(1) + 10.5y(1) & = \frac{10}{7} \\ 90x(1) + 10.5y(1) & = \frac{10}{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1) = \frac{2}{63} \\ y(1) = -\frac{100}{441} \end{cases} \boxed{2 \text{ pkt}}.$$

Obliczamy cenę opcji

$$\begin{aligned} H(0) &= V_{(x,y)}(0) \quad \text{(z Prawa Jednej Ceny)} \\ &= x(1)S(0) + y(1)A(0) \quad \text{(z samofinansowania)} \\ &= \frac{400}{441}. \boxed{2 \text{ pkt}} \end{aligned}$$

Odpowiedź $H(0) = \frac{400}{441}$.

IMIĘ I NAZWISKO | | , numer indeksu | |

3. (10 pkt) Podaj definicję instrumentu pochodnego typu amerykańskiego oraz wzór pozwalający wyznaczyć jego uczciwą cenę w dwolnej chwili w modelu wolnym od arbitrażu i zupełnym. Opisz wszystkie zmienne występujące w tym wzorze.

Definicja 1 *Instrumentem typu amerykańskiego H nazwiemy instrument, którego wypłata w chwili n jest dana jako $I_N(n)$, gdzie $(I_H(n))_{n\in\{0,\dots,N\}}$ jest procesem adaptowanym do filtracji $(\mathcal{F}_n)$. Właściciel H ma prawo (ale nie ma obowiązku)) otrzymać wypłatę $I_H(n)$ w dowolnej chwili $n \in \{0,\dots,N\}$. Wypłatę tę może otrzymać tylko raz, po czym intrument H przestaje istnieć.* $\boxed{5\ pkt}$

W modelu wolnym od arbitrażu i zuepłnym proces $(H(n))_{n\in\{0,\dots,N\}}$ uczciwych cen istrumentu amerykańskiego H o procesie wypłat $(I_H(n))_{n\in\{0,\dots,N\}}$ dany jest następującym wzorem rekurencyjnym

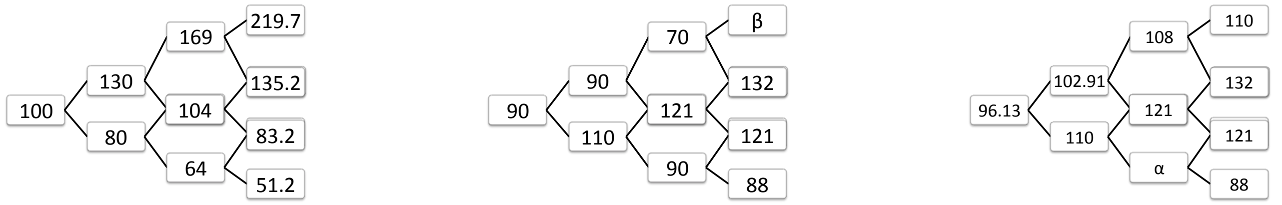
$$\begin{cases} H(N) & = I_H(N), \\ H(n) & = \max\left(I_H(n), \frac{1}{1+R}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(H(n+1)|\mathcal{F}_n\right)\right), \quad n = N-1, N-2, \dots, 0, \end{cases}$$

gdzie $\mathbb{Q}$ jest (wyznaczoną jednoznacznie) miarę martyngałową, R-stopą wolną od ryzyka (w skali jednego okresu), a $\mathcal{F}_n$- filtracją generowaną przez proces cen akcji $(S(n))$. $\boxed{5 \text{ pkt}}$

IMIĘ I NAZWISKO ______ ______, numer indeksu ______

4. (16 pkt) *Uzupełnij puste pola/zaznacz właściwą odpowiedź. UWAGA! Zaznaczenie właściwej odpowiedzi bez podania - przynajmniej częściowo dobrego - uzasadnienia nie jest punktowane!*

Rozważmy model trzykrokowy CRR, w którym $A(0) = 100$, $A(1) = 110$, $A(2) = 121$, $A(3) = 133.1$, natomiast proces cen akcji S dany drzewem dwumianowym (a):



(a) ceny akcji S **(b)** wypłaty z H **(c)** uczciwe ceny H

(a) (4 pkt) W powyższym modelu dane są opcje europejskie: kupna i sprzedaży o cenie wykonania $K = 100$ i momencie wygaśnięcia $N = 3$. Uczciwa cena w chwili 0 opcji sprzedaży jest równa 7. W takim razie uczciwa cena opcji kupna w tej samej chwili wynosi 31.87, ponieważ

$C(0) - P(0) = S(0) - \frac{K}{(1+R)^3} \Rightarrow C(0) = 7 + 100 - \frac{100}{1.1^3} \approx 31.87.$ 4 pkt

(b) (2 pkt) Strategia $(x(n), y(n))$ zdefiniowana jako

$$x(1) = 1,\ y(1) = 1,\ x(3) = x(2) = \begin{cases} 2, & \text{dla } \omega \in B_u, \\ -3, & \text{dla } \omega \in B_d \end{cases},\ y(3) = y(2) = \begin{cases} -\frac{2}{11}, & \text{dla } \omega \in B_u, \\ 4, & \text{dla } \omega \in B_d \end{cases}.$$

jest strategią samofinasującą ☐ PRAWDA ■ **FAŁSZ** , ponieważ

$$\begin{cases} V^d_{(x,y)}(1) & = 1 \cdot 80 + 1 \cdot 110 = 190 \\ x^d(2)S^d(1) + y^d(2)A(1) & = (-3) \cdot 80 + 4 \cdot 110 = 200 \neq 190 \end{cases}$$ 2 pkt.

(c) (2 pkt) Zmienna losowa τ zdefiniowana jako:

ω	uuu	uud	udu	udd	duu	dud	ddu	ddd
$\tau(\omega)$	2	3	2	3	1	1	1	1

jest strategią wykonania ☐ PRAWDA ■ **FAŁSZ** , ponieważ

$\{\omega : \tau(\omega) = 2\} = \{uuu, udu\} \notin \mathcal{F}_2$ 2 pkt

(d) (2 pkt) Wartość $\mathbb{Q}(S(2) = 104)$, gdzie $\mathbb{Q}$ jest miarą martyngałową w tym modelu, wynosi $\frac{12}{25}$, ponieważ

$\{S(2) = 104\} = \{udu, udd, duu, dud\}$
$q = \frac{10\%+20\%}{30\%+20\%} = \frac{3}{5}$

$\mathbb{Q}(\{udu, udd, duu, dud\}) = 2q^2(1-q) + 2q(1-q)^2 = \frac{12}{25}$ 2 pkt

W rozważanym modelu dany jest również opcja amerykańska H o wypłatach danych drzewem (b). Proces uczciwych cen tej opcji został zaznaczony został na drzewie (c).

(e) (2 pkt) Wartość α (zob. drzewo (c)), jest równa 98, ponieważ

$\alpha = \max(90, \frac{1}{1+R}(q \cdot 121 + (1-q) \cdot 88) \max(90, 98) = 98$ 2 pkt

(f) (2 pkt) Wartość β (zob. drzewo (b)) jest równa 110, ponieważ

$I_H(N) = H(N) \wedge N = 3$ 2 pkt

(g) (2 pkt) Optymalny moment wykonania opcji H dany jest jako

$$\tau_H(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{dla } \omega \in B_d \\ 2, & \text{dla } \omega \in B_{ud} \\ 3, & \text{dla } \omega \in B_{uu} \end{cases}$$ 2 pkt