Zestaw 0 - wartość pieniądza w czasie

1. Klient wpłacił do banku 1000 zł. Jaką kwotę odbierze po roku, jeżeli nominalna roczna stopa procentowa wynosi 3.5%, a odsetki są kapitalizowane kwartalnie?

2. Klient wpłacił do banku 10000 zł. Po dwóch latach wypłacono mu 10953 zł. Ile wynosiła półroczna stopa procentowa, jeżeli odsetki były kapitalizowane półrocznie? Ile wynosiła efektywna roczna stopa procentowa, a ile nominalna roczna stopa procentowa?

3. Bank oferuje miesięczną lokatę z oprocentowaniem nominalnym na poziomie 1.75% w skali roku. Ile należy dzisiaj wpłacić na lokatę, aby po miesiącu wybrać z niej 1250 zł?

4. Na mocy zawartej umowy wydawca będzie wypłacał autorowi książki na koniec kwartałów kwoty w wysokości 1000 zł, 500 zł, 200 zł, 100 zł. Jaka będzie obecna wartość tego strumienia płatności przy rocznej rynkowej stopie procentowej 8% i kwartalnej kapitalizacji odsetek?

5. Uzupełnij tabelę odpowiednimi wzorami przy założeniu, że mamy daną roczną stopę procentową r oraz kapitał początkowy $A(0)$:

kapitalizacja	okres lokaty	wartość po upływie okresu lokaty
dzienna	8 dni	
miesięczna	dwa miesiące	
miesięczna	kwartał	
miesięczna	rok	
miesięczna	14 miesięcy	
kwartalna	6 miesięcy	
kwartalna	9 miesięcy	
kwartalna	rok	
roczna	rok	
roczna	3 lata	
ciągła	3 miesiące	
ciągła	5 lat	

6. Firma może zakupić maszynę produkcyjną za 200000 zł, płatne natychmiast, albo w trzech ratach 70000 zł płatne teraz, 70000 zł płatne za rok oraz 70000 zł płatne za dwa lata. Która z tych możliwości jest korzystniejsza dla firmy, jeżeli pieniądze mogą zostać zainwestowane po rocznej nominalnej stopie 6% z miesięczną kapitalizacją?

7. *(Egzamin aktuarialny, 2011)* Bank oferuje trzy lokaty o zmiennym oprocentowaniu, z comiesięczną kapitalizacją odsetek:

   - lokata A – 13 miesięczna z następującym oprocentowaniem w kolejnych miesiącach

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3.0%	i	3.5%	3.6%	5.0%	j	3.8%	4.7%	5.6%	9.0%	7.5%	5.5%	6.6%

- lokata B – 9 miesięczna z następującym oprocentowaniem w kolejnych miesiącach:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
j	3.4%	3.8%	3.2%	5.3%	4.4%	6.0%	k	5.0%

- lokata C – 7 miesięczna z następującym oprocentowaniem w kolejnych miesiącach:

1	2	3	4	5	6	7
4.8%	k	3.8%	4.0%	i	3.4%	4.4%

Wiadomo, że inwestując środki w przedmiotowe lokaty uzyskuje się takie same wyniki inwestowania jak w przypadku analogicznych lokat (comiesięczna kapitalizacja oraz ten sam okres inwestycji) o odpowiednim stałym oprocentowaniu, które dla poszczególnych lokat wynosi: lokata A – 5%, lokata B – 4.8%, lokata C – 4.5%. Wszystkie podane wyżej stopy procentowe (również te w tabelach) są to nominalne roczne stopy procentowe. Oblicz sumę $i + j + k$. Podaj najbliższą wartość.

(a) 14.8%;
(b) 15.2%;
(c) 15.6%;
(d) 16.0%;
(e) 16.4%.

8. Zmienna losowa X ma rozkład dwupunktowy, tj. przyjmuje tylko dwie wartości a i b z prawdopodobieństwami odpowiednio p i $1-p$. Wykaż, że
$$\mathrm{Var}(X) = p(1-p)(a-b)^2.$$

9. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ oraz $\mathbb{P}$ jest miarą probabilistyczną, dla której $\mathbb{P}(\omega_1) = p$. Zmienne losowe X i Y mają rozkład dwupunktowy na tej przestrzeni, tj.
$$X(\omega) = \begin{cases} x_1, & \text{gdy } \omega = \omega_1 \\ x_2, & \text{gdy } \omega = \omega_2 \end{cases}, \quad Y(\omega) = \begin{cases} y_1, & \text{gdy } \omega = \omega_1 \\ y_2, & \text{gdy } \omega = \omega_2 \end{cases}.$$
Wykaż, że
$$Cov(X,Y) = p(1-p)(x_1 - x_2)(y_1 - y_2).$$

10. *(Egzamin aktuarialny, 1996)* Wiadomo, że A,B i C są trzema zdarzeniami losowymi takimi, że
$$P(A) = \frac{2}{5}, \quad P(B|A) = \frac{1}{4}, \qquad P(C|A \cap B) = \frac{1}{2},$$
$$P(A \cup B) = \frac{6}{10}, \quad P(C|B) = \frac{1}{3}.$$

Ile wynosi $P(A|B \cap C)$?

(a) $\frac{2}{3}$;
(b) $\frac{3}{5}$;
(c) $\frac{1}{2}$;
(d) $\frac{3}{10}$;
(e) Podane informacje nie wystarczają do udzielenia odpowiedzi.

11. *(Egzamin aktuarialny, 1996)* Wykonujemy 10 kolejnych, niezależnych rzutów symetryczną monetą. Niech S_n oznacza liczbę orłów otrzymaną w początkowych n rzutach. Prawdopodobieństwo warunkowe $P(S_5 = 3|S_{10} = 7)$ jest równe

    (a) $\frac{3}{7}$;
    (b) $\frac{5}{12}$;
    (c) $\binom{5}{3}\frac{1}{2^5}$;
    (d) $\frac{21}{50}$;
    (e) $\frac{\binom{5}{3}\frac{1}{2^5}}{\binom{10}{3}\frac{1}{2^{10}}}$.

12. *(Egzamin aktuarialny, 2015)* Rzucamy czterema symetrycznymi monetami. Następnie rzucamy ponownie tymi monetami, na których nie wypadły „orły". W trzeciej rundzie rzucamy tymi monetami, na których do tej pory nie wypadły „orły". Oblicz prawdopodobieństwo, że po trzech rundach na wszystkich monetach będą „orły" (wybierz najbliższą wartość).

    (a) $0,500$;
    (b) $0,234$;
    (c) $0,456$;
    (d) $0,117$;
    (e) $0,586$.