Zestaw 1 - jednokrokowy model dwumianowy, replikacja

Uwaga! Dla dowolnej zmiennej losowej Z przyjmujemy oznaczenia

$$\boxed{\mu_Z = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z)},$$
$$\boxed{\sigma_Z^2 = \mathrm{Var}_{\mathbb{P}}(Z)}.$$

1. Przypuśćmy, że dzisiejsza cena akcji jest równa $S(0) = 100$, natomiast cena akcji w chwili $t = 1$ dana jest jako

$$S(1, \omega) = \begin{cases} 120 \text{ gdy } \omega = u \\ 90 \text{ gdy } \omega = d \end{cases}$$

   Ponadto wiadomo, że dla waloru wolnego od ryzyka mamy $A(0) = 100$, $A(1) = 130$.

   (a) Oblicz wartości U, D oraz wyznacz stopę zwrotu z akcji K_S.

   (b) Wyznacz stopę wolną od ryzyka R.

   (c) Czy na opisanym powyżej rynku możliwy jest arbitraż? Jeżeli tak, to skonstruuj strategię arbitrażową.

2. Rozważ walor z dzisiejszą ceną akcji $S(0) = 75$ oraz stopą zwrotu

$$K_S = \begin{cases} -10\%, & \text{z prawdopodobieństwem } \frac{1}{6} \\ 20\%, & \text{z prawdopodobieństwem } \frac{5}{6} \end{cases}.$$

   (a) Oblicz przyszłe ceny akcji.

   (b) Na rynku dostępny jest walor wolny od ryzyka, którego cena w dniu dzisiejszym wynosi $A(0) = 1000$. Wyznacz wszystkie możliwe wartości $A(1)$, wiedząc, że na rynku nie ma możliwości arbitrażu.

   (c) Wyznacz wartości μ_{K_S} i $\sigma_{K_S}^2$.

3. Niech $S(0) = 100$, $U = 0.2$, $D = -0.1$, $p = 0.9$, $A(0) = 1$, $R = 10\%$. Dany jest portfel (x, y), którego wartość w chwili 0 jest równa $V_{(x,y)}(0) = 120$. Wiadomo, że $y = -80$.

   (a) Wyznaczyć liczbę akcji w portfelu.

   (b) Wyznaczyć wartość portfela w chwili 1.

   (c) Wyznaczyć $V_{(x,y)}(1) - V_{(x,y)}(0)$.

4. W chwili 0, wartość waloru wolnego od ryzyka wynosi $A(0) = 100$, natomiast cena akcji to $S(0) = 100$. Przypuśćmy, że roczna stopa wolna od ryzyka wynosi $R = 5\%$, a roczna stopa zwrotu na akcji

$$K_S = \begin{cases} 10\%, & \text{z prawdopodobieństwem } 60\% \\ -5\%, & \text{z prawdopodobieństwem } 40\% \end{cases}.$$

(a) Wyznacz portfel (x, y), którego wartość w chwili 1 dana jest jako

$$\begin{cases} 1000, & \text{gdy cena akcji wzrośnie} \\ 1500, & \text{gdy cena akcji spadnie} \end{cases}.$$

(b) Jaka jest oczekiwana stopa zwrotu z portfela wyznaczonego w poprzednim podpunkcie?

5. W modelu jednokrokowym dwumianowym dane niech będą $S(0)$, U, D, $A(0)$, R, p.

   (a) Wyznaczyć stopy zwrotu na instrumencie wolnym od ryzyka i na akcji, tj. K_A i K_S.

   (b) Obliczyć μ_{K_S}, $\sigma^2_{K_S}$.

   (c) Wykazać, że $\sigma^2_{K_S}$ jest rosnącą funkcją różnicy $U - D$.

6. Niech $S(0) = 100$, $U = 0.2$, $D = -0.1$, $p = 0.9$, $A(0) = 100$, $R = 10\%$. Dana jest opcja put P z ceną realizacji $K = 100$.

   (a) Znaleźć wypłatę z opcji P w chwili 1.

   (b) Znaleźć portfel replikujący opcję P.

   (c) Znaleźć wartość portfela replikującego w chwili 0.

7. Dane są: $S(0) = 100$, $U = 20\%$, $D = -10\%$, $R = 5\%$ oraz $\mathbb{P}(S(1) = S^u) = \frac{3}{4}$. W chwili zero skonstruowano portfel, na który składa się x akcji, $\frac{20}{7}$ pożyczonych jednostek rachunku bankowego (w chwili zero jednostka rachunku bankowego warta jest 10), i krótka pozycja na jednej opcji europejskiej call o cenie wykonania 110. Oblicz x, jeżeli wiadomo, że wariancja (wzgledem miary rzeczywistej) wartości tego portfela z chwili jeden jest równa zero.

8. *(Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2018)* Obecna cena akcji spółki A, od której nie jest wypłacana dywidenda, wynosi 60 PLN. Za rok od chwili obecnej cena tej akcji może być równa jednej z dwóch wartości: 50 PLN lub 80 PLN. Na rynku efektywnym istnieje europejska roczna opcja kupna na 1 akcje spółki A o cenie wykonania 70 PLN. Inwestor posiada jedną akcję spółki A i konstruuje portfel, którego wartość byłaby uodporniona na zmiany ceny akcji (za rok byłaby taka sama niezależnie od tego, czy cena akcji wzrośnie czy też spadnie). Określ, której z wymienionych poniżej wartości jest najbliższa liczba opcji kupna (krótka pozycja), która wejdzie w skład takiego portfela.

   (a) 1;

   (b) 3;

   (c) 5;

   (d) 6.

9. *(Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2018)* Bieżąca cena akcji spółki Gamma wynosi 8 PLN. Roczna stopa zwrotu z aktywów wolnych od ryzyka równa jest 5% przy kapitalizacji ciągłej. Na koniec najbliższego roku cena akcji może wzrosnąć do 10 PLN albo spaść do 6 PLN. Załóż, że rynek znajduje się w stanie równowagi. Na podstawie powyższych danych określ, która z poniższych wartości jest najbliższa wartości europejskiej opcji kupna akcji spółki Gamma z terminem wykonania jeden rok i z ceną wykonania 8 PLN.
   (a) 0,88 PLN;
   (b) 1,14 PLN;
   (c) 2,34 PLN;
   (d) 2,78 PLN.

10. Dane sa: aktualna cena akcji równa 100, $S^u = 115$, $D = -5\%$, $K = 51$. Wiadomo również, że zainwestowana dziś złotówka za rok bedzie warta jeden złoty i pięć groszy.
    (a) Czy powyższy rynek dopuszcza możliwość arbitrażu?
    (b) Wyceń metodą replikacji instrument pochodny o wypłacie w chwili jeden równej $(\frac{1}{2}S(1) - K)^+$.
    (c) Ktoś kupił od Ciebie instrument z podpunktu (b). Opisz jaką strategię przyjmiesz, by osłonić sie przed ryzykiem.

11. Rozważmy następujący model dwumianowy:

$$A(0) = 10,\ A(1) = 12,\ S(0) = 75,\ S^u = 120,\ S^d = 72.$$

    Skonstruować strategię arbitrażową w celu pokazania, że cena opcji równa 6 nie jest odpowiednia dla opcji europejskiej call z ceną wykonania 96.

12. Rozważmy model dwumianowy, w którym: $S(0) = 70,\ S^u = 77,\ D = -\frac{1}{20},\ A(1) = 37,8,\ R = 5\%$. Na rynku dostepna jest (po cenie z rynku można ją kupić, bądź pożyczyć i sprzedać) tylko jedna europejska opcja kupna z ceną realizacji równą 70,7 w cenie 4,5.
    (a) Czy na powyższym rynku istnieje możliwość arbitrażu?
    (b) Czy kupiłbyś tę opcję w cenie 4,5?
    (c) Wskaż dwie **istotnie**[1] różne strategie arbitrażowe.

13. W modelu jednokrokowym dwumianowym dane niech będą $S(0)$, U, D, $A(0)$, R, p. Wyznacz portfel replikujący dla kontraktu forward (długa pozycja) z ceną wykonania K, a następnie wartość kontraktu w chwili 0, przy założeniu, że na rynku nie ma możliwości arbitrażu.

[1] tj. nie będące swoimi wielokrotnościami

14. *(Egzamin aktuarialny, 2017)* W dniu dzisiejszym cena akcji spółki Z wynosi 147. Dostępna jest europejska opcja kupna o cenie wykonania 150 i czteromiesięcznym terminem wygaśnięcia. Cenę akcji można zapisać jako funkcję $S_T : \Omega \to \mathbb{R}_+$, którą opisuje następująca formuła:

$$S_T(\omega) = \begin{cases} S^u = 165, & \text{gdy } \omega = \omega_1 \\ S^d = 120, & \text{gdy } \omega = \omega_2 \end{cases}.$$

Widząc, że cena akcji jest zmienną losową na przestrzeni probabilistycznej $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, której prawdopodobieństwo wzrostu wynosi:

$$P(\{\omega_1\}) = 0.3,$$

wyznacz różnicę między ceną arbitrażową opcji a wartością oczekiwaną jej wypłaty. Zakłada się, że oprocentowanie czteromiesięcznych depozytów wynosi 4%.

(a) $6,21$;

(b) $8,65$;

(c) $10,09$;

(d) $10,54$;

(e) $11,54$.

15. *(Egzamin aktuarialny, 2011)* W chwili obecnej cena niepłacącej dywidendy akcji wynosi 18. Wiadomo, że za 6 miesięcy cena tej akcji wzrośnie do wysokości 22 albo spadnie do wysokości 14. Cena europejskiej opcji kupna na tę akcję, z terminem wykonania za 6 miesięcy i ceną wykonania 20 wynosi 1.25. Ponadto, roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 6%. Które, z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe, przy założeniu, że nie istnieją koszty transakcji, aktywa są idealnie podzielne, a oprocentowanie depozytów i pożyczek jest takie samo i równe stopie wolnej od ryzyka?

(a) Nie istnieje możliwość osiągnięcia zysku arbitrażowego.

(b) Istnieje możliwość osiągnięcia zysku arbitrażowego w wysokości 0.15, jeśli: kupimy opisaną opcję kupna, sprzedamy 0.25 akcji i złożymy depozyt w wysokości 3.40.

(c) Istnieje możliwość osiągnięcia zysku arbitrażowego w wysokości 0.15, jeśli: sprzedamy opisaną opcję kupna, kupimy 0.25 akcji i zaciągniemy pożyczkę w wysokości 3.40.

(d) Istnieje możliwość osiągnięcia zysku arbitrażowego w wysokości 0.30, jeśli: kupimy opisaną opcję kupna, sprzedamy 0.5 akcji i złożymy depozyt w wysokości 9.05.

(e) Istnieje możliwość osiągnięcia zysku arbitrażowego w wysokości 0.30, jeśli: sprzedamy opisaną opcję kupna, kupimy 0.5 akcji i zaciągniemy pożyczkę w wysokości 9.05