## Zestaw 10 - wycena opcji amerykańskich.

Do wyznaczenia uczciwej ceny danej opcji amerykańskiej można zastosować następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 1.** *Dany niech będzie model $N$-krokowy z jedną akcją i jednym bonem. Przypuśmy, że model ten jest wolny od arbitrażu i zupełny. Niech $H$ będzie opcją amerykańską, z której wypłata w momencie wykonania $n$ dana jest jako $I_H(n)$. Wówczas proces $(H(n))$ uczciwych cen tego instrumentu jest wyznaczony jednoznacznie, przy czym zadany jest rekurencyjnie jako*

$$\begin{cases} H(N) & = I_H(N), \\ H(n) & = \max\left(I_H(n), \frac{1}{1+R}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(H(n+1)|\mathcal{F}_n\right)\right), \quad n = N-1, N-2, \ldots, 0, \end{cases}$$

*gdzie $\mathbb{Q}$ jest (wyznaczoną jednoznacznie) miarą martyngałową w rozważnym modelu.*

Dla danej opcji amerykańskiej $H$, której uczciwa cena w chwili $n$ wynosi $H(n)$, wprowadzamy również następujące oznaczenie

$$\boxed{\tau_H = \min\{n \in \{0, \ldots, N\} : H(n) = I_H(n)\}}.$$

1. Wykaż, że zdefiniowana powyżej zmienna losowa $\tau_H$, jest strategią wykonania.
2. Rozważmy model dwumianowy, w którym $S(0) = 60$, $U = 0.1$, $D = -0.05$ i $R = 0.03$.
   (a) Wyznacz proces $(P(n))_{n\in\{0,1,2,3\}}$ uczciwych cen opcji amerykańskiej typu put o cenie wykonania $X = 62$ i momencie wygaśnięcia $T = 3$.
   (b) Oblicz oczekiwane wartości zdyskonotwanych wypłat z opcji wykonanych w następujących momentach:
   $$\tau_1(\omega) = 2, \text{ dla } \omega \in \Omega,$$
   $$\tau_2(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in B_u \\ 2, & \omega \in B_{du} \\ 3, & \omega \in B_{ddu} \cup B_{ddd} \end{cases}$$
   $$\tau_3(\omega) = \begin{cases} 2, & \omega \in B_{uu} \\ 3, & \omega \in B_{ud} \cup B_d \end{cases}$$
   (c) Wyznacz wartość $\tau_H$ dla każdego $\omega \in \Omega$ oraz oblicz wartość oczekiwaną zdyskonotowanej wypłaty z opcji wykonanej w momencie $\tau_H$.
3. Rozważmy model dwumianowy dwukrokowy, w którym $S(0) = 120$, $U = 0.2$, $D = -0.1$ i $R = 0.1$. W każdym wierzchołku drzewa dwumianowego porównaj uczciwe ceny opcji amerykańskiej typu call i europejskiej typu call, obie o cenie wykonania $X = 120$ i momencie wygaśnięcia $T = 2$.

4. Rozważmy model dwumianowy dwukrokowy, w którym $S(0) = 80$, $U = 0.1$, $D = -0.05$ i $R = 0.05$.
   (a) Wyznacz uczciwą cenę opcji amerykańskiej typu put o cenie wykonania $X = 80$ i momencie wygaśnięcia $N = 2$. Porównaj cenę tej opcji z ceną opcji europejskiej typu put o tych samych parametrach.
   (b) Wyznacz zbiór $\mathcal{T}$ wszystkich strategii wykonania dla opcji z punktu (a).
   (c) Dla każdego $\tau \in \mathcal{T}$ wyznacz wartość oczekiwaną zdyskontowanej wypłaty z opcji wykonanej w momencie $\tau$. Dla jakiej strategii wykonania $\tau_0 \in \mathcal{T}$ ta wartość jest największa?
   (d) Wyznacz wartość $\tau_H$ dla każdego $\omega \in \Omega$, dla $H$ będącej opcją z punktu (a).
5. *(Egzamin aktuarialny, 2008)* Rozważmy amerykańską opcję sprzedaży na akcję nie płacącą dywidendy. Termin wygaśnięcia dla tej opcji upływa za 3 lata. Obecna cena akcji wynosi 150 a jej cena wykonania 160. Wiadomo, że w ciągu każdego roku cena akcji rośnie bądź maleje o 25%. Intensywność oprocentowania wynosi 0.07 (kapitalizacja ciągła). Ile wynosi obecna cena tej opcji przy założeniu braku arbitrażu? Podaj najbliższą wartość.
   (a) 5;
   (b) 10;
   (c) 15;
   (d) 20;
   (e) 25.
6. Rozważmy model dwumianowy dwukrokowy, w którym $S(0) = 100$, $U = 0.1$, $D = -0.1$ i $R = 0.05$. Wyznacz uczciwą cenę opcji amerykańskiej typu put o cenie wykonania
   (a) $X = 91$
   (b) $X = 100$

   i momencie wygaśnięcia $N = 2$. Zastanów się kiedy opłaca się realizować opcję amerykańską w pierwszym i drugim przypadku.
7. Wyznacz uczciwą cenę w chwili 0 amerykańskiej opcji typu straddle o wypłacie w chwili $n$ równej $I(n) = |S(n) - 50|$ w dwumianowym czterokrokowym modelu CRR o parametrach $S(0) = 50$, $U = 12\%$, $D = -6\%$ oraz $R = 5\%$. Jaka jest optymalna strategia wykonania takiej opcji?