

Zestaw 11 - opcje amerykańskie: hedging i arbitraż.

1. Niech H będzie opcją amerykańską w modelu N -krokowym wolnym od arbitrażu i zupełnym. Niech $(H(n))$ będzie procesem uczciwych cen tej opcji.

- (a) Wykaż, że istnieje rozkład procesu $(\tilde{H}(n))$ postaci:

$$\tilde{H}(n) = M(n) + A(n), \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

gdzie $(M(n))$ jest martyngałem, $(A(n))$ jest nierosnącym procesem przewidywalnym, oraz $M(0) = H(0)$, $A(0) = 0$.

- (b) Korzystając z poprzedniego podpunktu oraz z zupełności modelu wykaż, że istnieje strategia samofinansująca $(x_H(n), y_H(n))_{n \in \{1, \dots, N\}}$ dla której

$$H(n) = V_{(x_H, y_H)}(n) + A(n), \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

- (c) Wykaż, że dla strategii (x_H, y_H) z poprzedniego podpunktu zachodzi

$$V_{(x_H, y_H)}(0) = H(0),$$

oraz

$$V_{(x_H, y_H)}(n) \geq I_H(n), \quad n = 0, 1, \dots, N$$

- (d) W jaki sposób wystawiający opcję H może osłonić się przed ryzykiem, jakie niesie ze sobą jego zobowiązanie w stosunku do właściciela opcji?

2. Rozważmy model dwumianowy, w którym $S(0) = 100$, $U = 15\%$, $D = -15\%$ i $R = 5\%$.

- (a) W każdym wierzchołku drzewa wyznacz cenę opcji amerykańskiej typu put o cenie wykonania $X = 80$ i momencie wygaśnięcia $T = 3$.

- (b) Znajdź optymalny czas wykonania opcji (moment stopu) dla opcji amerykańskiej z punktu (a).

- (c) Wyznacz kompensator procesu $(\tilde{P}(n))$ zdyskontowanych uczciwych cen tej opcji.¹

- (d) Wyznacz strategię samofinansującą $(x_P(n), y_P(n))$ spełniającą warunki

$$V_{(x_P, y_P)}(0) = P(0),$$

oraz

$$V_{(x_P, y_P)}(n) \geq I_P(n),$$

- (e) Jak wystawiający opcję powinien osłaniać opcję Amerykańską typu put z punktu (a) dla scenariusza ddu ?

¹kompensatorem nazywamy przewidywalny proces A występujący w rozkładzie Dooba

3. Rozważmy opcję straddle z zadania 7 z Zestawu 10. Wyznacz kompensator procesu $(\tilde{H}(n))$ zdyskontowanych uczciwych cen tej opcji.
4. Rozważmy model dwumianowy, w którym $S(0) = 100$, $U = 15\%$, $D = -10\%$ i $R = 5\%$. Dana jest amerykańska opcja put z ceną wykonania $K = 100$ i czasem wykonania $T = 5$. Niech $P(n)$ będzie uczciwą ceną tej opcji w chwili n .
 - (a) Wyznacz postać kompensatora procesu $(\tilde{P}(n))$.
 - (b) Jak wystawiający opcję powinien osłaniać powyższą opcję Amerykańską typu put dla scenariusza *dduud*?
5. Rozważmy model z zadania 6 z Zestawu 10. Dla której z opcji istnieje strategia samofinansująca, replikująca wypłatę z opcji wykonanej w dowolnym momencie $\tau \in \mathcal{T}$? Jeżeli taka strategia istnieje - wyznacz ją. W przeciwnym wypadku wykaż jej nieistnienie.
6. Rozważmy model z zadania 6 z Zestawu 10, z opcją z pdpkt. (b). Wskaż i opisz strategię arbitrażową w każdym z poniższych przypadków, jeżeli wiadomo, że opcja ta w chwili 0 jest wyceniana następująco
 - (a) $P(0) = 2.5$,
 - (b) $P(0) = 3.0$.
7. Dany jest model N -krokowy, w którym wolna od ryzyka stopa w każdym kroku jest równa 0. Rozważmy opcję amerykańską H zapadającą w chwili N o wypłacie w chwili n danej jako $I_H(n) = h(S(n))$. Załóżmy, że h jest funkcją wypukłą. Wykazać, że uczciwa cena opcji amerykańskiej jest równa uczciwej cenie opcji europejskiej o tych samych parametrach.²

²wskazówka: skorzystaj z nierówności Jensena dla WWO